

ANALÝZA MAXIMÁLNYCH OBJEMOV DANÉHO TRVANIA PRE PRIETOKOVÉ VLNY NA RIEKE TOPLA

Veronika Bačová Mitková, Pavla Pekárová

V aplikovanej hydrológii je problematické priradiť hodnoty objemu povodňových vln s určitou pravdepodobnosťou prekročenia výskytu, daným korešpondujúcim hodnotám N -ročných prietokov. Táto závislosť je značne nepravidelná a vyžaduje si poznať tiež priebeh prietokovej vlny danej pravdepodobnosti prekročenia. Aj z tohto dôvodu sa daný príspevok zaoberá určením ročných maximálnych objemov odtoku v povodí rieky Topľa pre trvanie 2, 5, 10, 15 a 20-dní (V_{tmax}). Pri výpočte radov maximálnych ročných objemov odtoku rieky Topľa danej dĺžky trvania bol použitý 84-ročný (1931 – 2015) rad priemerných denných prietokov rieky Topľa v stanici Hanušovce nad Topľov. Následne boli určené teoretické čiary prekročenia radov maximálnych objemov odtoku V_{tmax} pomocou Log-Pearsonovho rozdelenia tretieho typu. Tento typ rozdelenia pravdepodobnosti sa využíva na odhad maximálnych (extrémnych) hodnôt v celom rade prírodných procesov. Výsledky ukázali pomerne malé rozdiely v odhadnutých N -ročných objemoch pri porovnaní s ďalšími typmi teoretických rozdelení pravdepodobnosti používanými pri hydrologických analýzach extrémov v SR. Druhá časť príspevku sa zameriava na analýzu a štatistické vyhodnotenie vzájomnej závislosti výskytu prietoku a objemu povodňovej vlny daného trvania pomocou kopula funkcií.

KEÚČOVÉ SLOVÁ: rieka Topľa, maximálny objem odtoku, N -ročný objem, maximálny prietok, rozdelenie pravdepodobnosti, kopula funkcia

ANALYSIS OF MAXIMUM RUNOFF VOLUMES WITH DIFFERENT TIME DURATIONS OF FLOOD WAVES ON THE TOPLA RIVER. In applied hydrology, it is problematic to assign the flood wave volume values with a certain probability of exceedance to given corresponding T -year discharges. This dependence is highly irregular, and requires to knowledge of the flood wave course of the given probability exceedance. For this reason, this paper deals with the determination of the annual maximum discharge volumes on the Topľa River for the time duration of 2-, 5-, 10-, 15- and 20-days (V_{tmax}). The series of 84-years (1931–2015) mean daily discharges of the river Topľa at Hanušovce nad Topľov station was used to calculate the maximum annual volumes of runoff of the river Topľa. Subsequently, the theoretical curves of exceedance of the maximal discharge volumes V_{tmax} were determined by the Log-Pearson distribution of the Type III. This type of probability distribution is used to estimate maximum (extreme) values across a range of natural processes. The results showed relatively small differences in estimated T -year volumes with comparison of other types of theoretical distribution functions used in hydrological extreme analyses in Slovakia. The second part of the paper is focused on the analysis and statistical evaluation of the interdependence and occurrence of maximum discharges and volumes with different time duration using the copula functions.

KEY WORDS: Topľa River, maximum runoff volume, T -year volume, peak discharge, probability distribution, copula function

Úvod

Dôsledky klimatickej zmeny na vodnosť tokov prinášajú zvyšovanie extrémnych (sucho, povodne) prietokov a objemov povodní. Riešenia niektorých vodohospodárskych úloh si vyžaduje poznať nielen maximálny prietok, ale aj tvar povodňovej vlny, alebo aspoň jej

objem. Pri štúdiu parametrov povodňových vln sa zvyčajne najväčšia pozornosť venuje kulmináčnym prietokom alebo maximálnym vodným stavom. Moderným potrebám vodného hospodárstva nepostačujú však len tieto základné údaje o extrémnych povodniach. Objemy, napriek tomu, že ich význam je mimoriadne dôležitý sa vyhodnocujú málokedy. Význam objemu

povodňovej vlny ako dôležitej hydrologickej charakteristiky sa prejavil napr. pri povodni na Dunaji v roku 1965, kedy došlo k pretrhnutiu ochranných hrádzi za výskytu mimoriadne dlhotrvajúcich vysokých vodných stavov povodňovej vlny. Bratránec (1937), ktorý sa u nás ako prvý zaoberal teoretickým spracovaním objemov povodní, určoval objemy priamou a nepriamou metódou. V prvom prípade spracovával objemy všetkých väčších povodní nad zvolenými hranicami prietokov pomocou čiar ich opakovania. N -ročné objemy určoval z extrapolovanej čiar opakovania. Pri druhej – nepriamej metóde určovania maximálnych objemov – vychádzal zo zovšeobecnenia výsledkov spracovania prietokových vlín. Nevýhodou tejto metódy je, že odvodený vzorec nemožno použiť pre objemy s menšou pravdepodobnosťou prekročenia prietoku ako je opakovanie v priemere raz za 20 rokov. Vo väčšom regionálnom rozsahu študoval neskôr objemy povodňových vlín, ktoré prislúchali povodňovej udalosti s prietokom vyšším ako hodnota dlhodobého ročného priemerného prietoku Čermák (1956). Spracovaním výpočtu maximálnych objemov Dunaja sa zaoberal Zatkálík (1970), ktorý pri výpočte maximálnych objemov povodňových vlín zvolil za základ postup zohľadňujúci dobu trvania povodňovej vlny v dňoch. Mitková a kol. (2002) a Halmová a kol. (2008) sa vo svojich prácach zaoberali analýzou zmien maximálnych objemov prietokových vlín na Dunaji. Szolgay a kol. (2012) sa zaoberali odhadom objemu povodňovej vlny, ktorý zodpovedá maximálnemu návrhovému prietoku s priemernou dobou opakovania $N = 10\,000$ rokov. Zo zahraničných autorov sa určením maximálnych objemov zaoberal napr. Beard (1956), ktorý použil teoretické krivky prekročenia na výpočet ročných maximálnych objemov rôznej pravdepodobnosti prekročenia, pri uvažovaní ďalšieho parametra – doby trvania prietokovej vlny t . Hodnoty parametra t sa volia v závislosti od charakteru a veľkosti povodia danej rieky. Do súboru pritom vyberal vždy jednu maximálnu hodnotu objemu, ktorý prislúchal určitému prietoku daného trvania v každom roku. Guo and Adams (1998) sa zaoberali odvodením matematických výrazov pre rozdelenie pravdepodobnosti objemu odtoku a maximálnej rýchlosti prietoku z povodia. Paquet a kol. (2013) predstavili pravdepodobnostnú metódu SCHADEX pre extrémny odhad povodní. Analyzovali hydrografy významných záplav a v jednom z krokov umožnili výpočet pomeru vrcholu vlny k objemu vlny použitého na transpozíciu odhadovanej distribúcie vrcholov povodne z odhadovaného rozloženia objemov povodní. Modelovaním povodňových prietokov a objemov povodňových vlín pomocou špeciálnych štatistických metód sa zaoberali aj Mediero a kol., (2010). Bezak a kol. (2015) okrem iného, analyzovali korelačné závislosti medzi jednotlivými prvkami povodňových vlín.

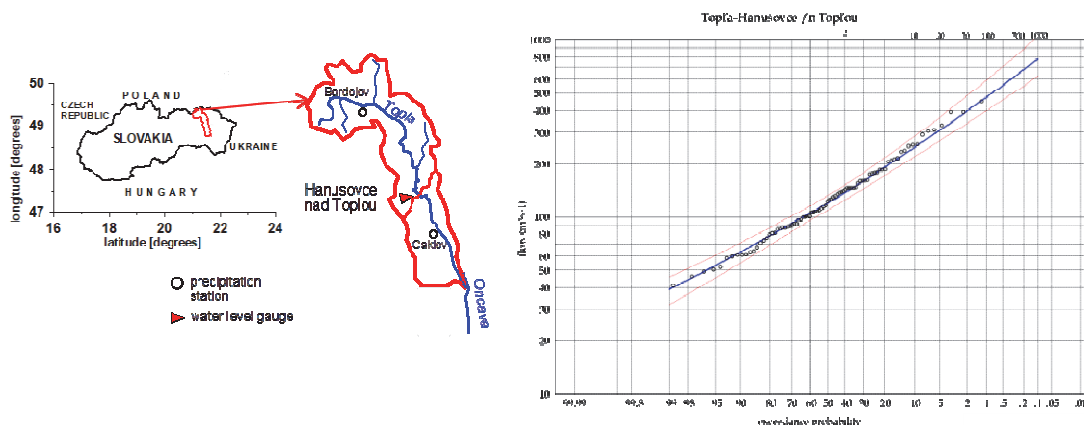
Vzhľadom na fakt, že povodňová vlna je viacrozmerná hydrologická udalosť vzniká aj potreba modelovať vývoj dvoch rizikových hydrologických faktorov, ktoré sú na sebe do istej miery závislé. V prípade modelova-

nia bez zhodnotenia závislosti medzi danými charakteristikami povodňovej vlny môže prísť k ich nadhodnoteniu (v prípade zápornej závislosti), alebo podhodnoteniu (v prípade kladnej závislosti). Z uvedených dôvodov je potrebné s touto závislosťou uvažovať. Tradičné prístupy pri analýzach párových závislostí medzi premennými ako je veľkosť a objem povodne môžu byť opísané klasickou triedou dvojrozmerných rozdelení. Za takúto triedu môžeme považovať dvojrozmerné kopula funkcie. V hydrológii je využitie tohto prístupu zastúpené v čoraz väčšom počte. Využitie kopula funkcií pri analýzach vzťahu medzi základnými zložkami prietokovej vlny sa zaoberali viacerí autori (Salvadori, 2004; Zhang a Singh, 2006; Sraj a kol. 2014; Fan a kol. 2016). V našich podmienkach sa modelovaním viacrozmerných časových radov v oblasti prírodných vied, najmä vzťahu maximálnych prietokov, objemu, prípadne dobe trvania povodňových vlín zaoberali napr. Bačová a Halmová (2014); Szolgay a kol. (2016) alebo Szolgay a kol. (2012). Cieľom tohto príspevku je:

- stanovenie maximálnych objemov daného trvania (2, 5, 10, 15 a 20 dní) Tople pri odtoku za obdobie 1931 – 2015;
- vykreslenie empirických a určenie teoretických čiar prekročenia radov maximálnych objemov odtoku Tople vo vodomernej stanici Hanušovce nad Topľou;
- analýza vzájomnej závislosti maximálnych objemov odtoku Tople daného trvania a maximálneho prietoku vlny pomocou kopula funkcií.

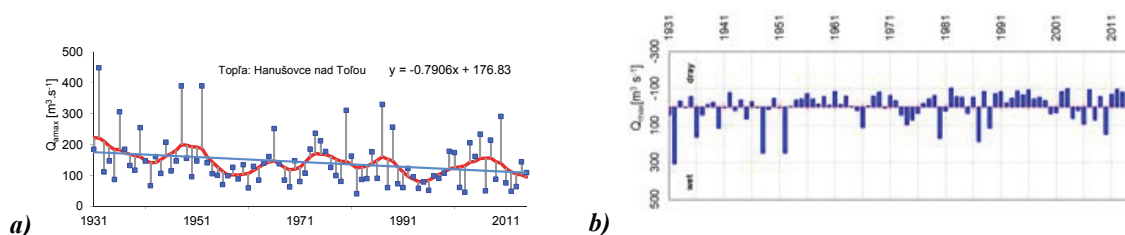
Opis povodia Tople a vstupné údaje

Topľa je vrchovinovo-nížinným typom rieky na východnom Slovensku, odvodňuje povodie veľké $1\,506\text{ km}^2$, má dĺžku $129,8\text{ km}$ a je najväčším pravostranným prítokom Ondavy (obr. 1a). Dlhodobý priemerný denný prietok 1931 – 2015 dosahuje hodnotu $8,1\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ (odtoková výška z povodia $244,2\text{ mm}$) v Hanušovciach nad Topľou. Maximálny prietok počas analyzovaného obdobia 1931 – 2015 v stanici Hanušovce nad Topľou bol $449\text{ m}^3\text{s}^{-1}$ (6.4.1932). Na obr. 1b) sú vykreslené pravdepodobnosti prekročenia maximálnych ročných prietokov podľa log-Pearsonovho rozdelenia pravdepodobnosti III. typu (LP3). Priebeh maximálnych ročných prietokov a ich dlhodobý trend je vykreslený na obr. 2a. Na obr. 2b) sú vykreslené odchýlky maximálnych ročných prietokov od dlhodobého priemerného ročného prietoku. V analyzovanom období sa vyskytli dve suché obdobia 1954 – 1964 a 1990 – 1999, zatiaľ čo vlhké obdobia môžeme označiť skôr ako roky, v ktorých sa vyskytli extrémne povodňové udalosti (napr. 1932, 1948, 1952 alebo 1980), relatívne dlhšie trvajúce vlhké obdobia bolo 2004 – 2010. Celkovo za obdobie 1931 – 2015 vykazujú maximálne ročné prietoky klesajúci trend. Dlhodobým vývojom hydrologickej bilancie, alebo kvantitatívnymi aj časovými zmenami v podzemnom odtoku v povodí Tople sa zaoberali napr. Pekárová a kol. (2018) alebo Fendeková a kol. (2017).



Obr. 1. a) Lokalizácia a schéma povodia Topľa a b) Pravdepodobnosť' prekročenia maximálnych ročných prietokov na rieke Topľa: Hanušovce nad Topľou v 1931 – 2015.

Fig. 1. a) A scheme of the Topľa River basin and b) exceedance probabilities of the annual peak discharges of the Topľa River: Hanušovce n. Topľou within 1931–2015.



Obr. 2. a) Maximálne ročné prietoky na rieke Topľa, trendová čiara a 5 ročné kľzavé priemery a b) odchýlky od dlhodobého priemerného ročného prietoku 1931 – 2015.

Fig. 2. a) Peak annual discharges, trend line and 5-yerars move averages and b) deviations from long-term mean annual discharge 1931–2015.

Stanovenie maximálnych ročných objemov daného trvania na Tople za obdobie 1931 – 2015.

Pri výpočte maximálnych ročných objemov prietokových vln na rieke Topľa vo vodomernej stanici Hanušovce nad Topľou sme zvolili postup, ktorý použil vo svojej práci Zatkalík (1970). Podkladovými údajmi pri stanovení maximálnych objemov prietokových vln boli priemerné denné prietoky vo zvolenej vodomernej stanici. Pre zvolené hodnoty doby trvania prietokovej vlny t (2, 5, 10, 15, 20 dní) sme určili maximálny objem pre maximálnu povodňovú udalosť v roku, z ktorých boli zostavené štatistické rady pre danú dobu trvania. Ak povodňová udalosť trvala menej ako 20 dní, zaradili sme do výpočtu obdobie s vyrovnanými prietokmi pred a po povodňovej vlne.

Napríklad v roku 1932 v prípade $t = 5$ dní bolo spočítaných päť 5-denných kľzavých priemerov objemu okolo kulminačného prietoku, ktorý sa vyskytol 6. 4. 1932. Do súboru pre výpočet maximálneho objemu sa začlenila jedna – maximálna hodnota objemu od 3. 4. do 7. 4. 1932 (obr. 3). Časový priebeh maximálnych obje-

mov odtoku na rieke Topľa pre zvolené doby trvania odtoku sú vykreslené na obr. 4 a) – e). Z hľadiska 2-dňových až 15-denných maximálnych objemov, najväčšou povodňou v období 1932 – 2015 bola povodeň v roku 1932.

Výpočet čiar prekročenia maximálnych ročných objemov daného trvania na Tople za obdobie 1931 – 2015.

V našej analýze sme sa zamerali na použitie jedného typu teoretického rozdelenia pravdepodobnosti.

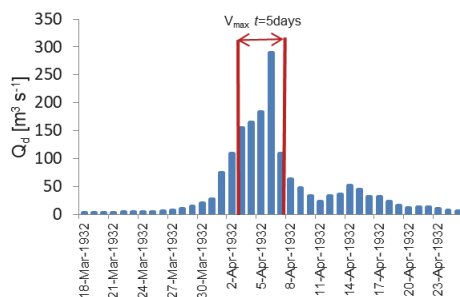
Pomerne často sa využíva pri frekvenčnej analýze hydrologických extrémov Log-Pearsonovo rozdelenie III typu (LP3). Toto rozdelenie pravdepodobnosti patrí do skupiny Pearsonových rozdelení pravdepodobností typu III (označované aj trojparametrické Gamma rozdelenie) s logaritmickou transformáciou údajov (napr. max. prietok):

$$y = \ln x \rightarrow x = e^y \quad (1)$$

Teoretické LP3 rozdelenie je trojparametrické rozdelenie s parametrami: stredná hodnota μ , rozptyl (varian-

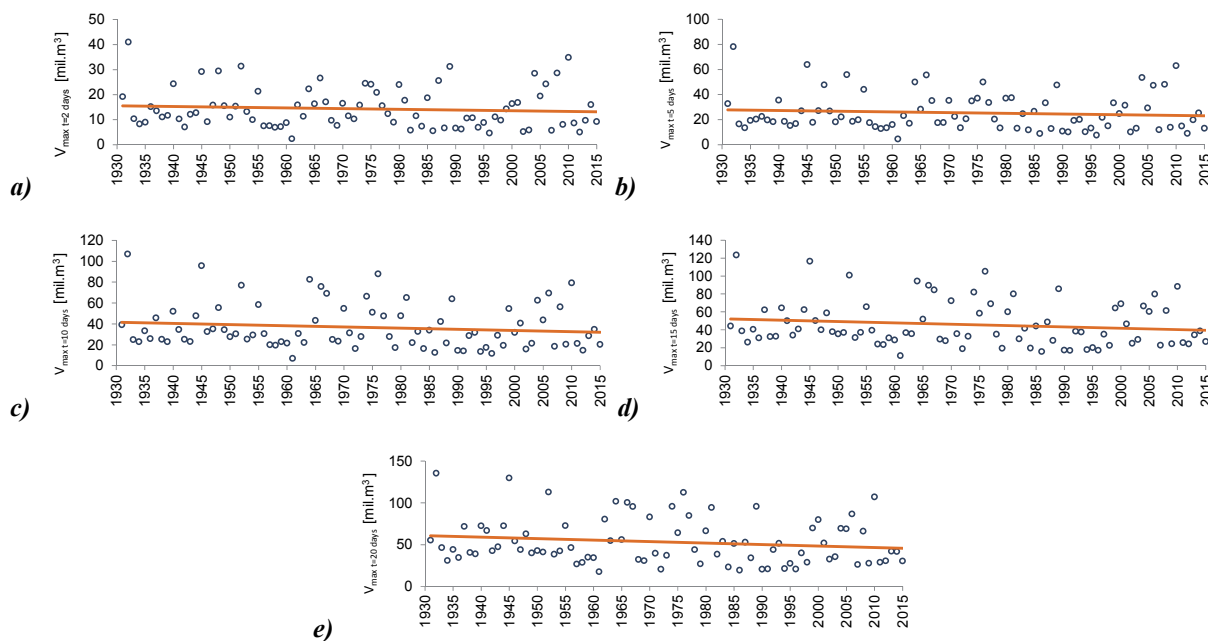
cia σ^2 a asymetria γ transformovaných údajov (LGMO – Logarithmic moments). Ďalšie možnosti odhadu parametrov LP3 rozdelenia, ako RLMO – metóda reálnych momentov, MXM – metóda zmiešaných momentov, sú uvedené napríklad v prácach autorov Bobee (1975), alebo Rao (1980a, 1980b). Rovnica kumulatívnej distribučnej funkcie (CDF) a rovnica pravdepodobnostnej distribučnej funkcie (PDF) sú uvedené napr. v Hosking, (1997). Vo svetovej literatúre existuje celý rad vedeckých prác zaoberajúcich sa výberom a testovaním vhodnosti teoretických rozdelení pravdepodobnosti pri odhade maximálnych hodnôt hydrologických charakteristík. Preto sme porovnali LP3

rozdelenie s teoretickými rozdeleniami pravdepodobnosti, ktoré patrili (a stále patria) i v našej hydrologickej praxi k najviac používaným a sú odporúčané aj OTN ŽTP 3112-1:03: Gamma rozdelenie a Log-normálne rozdelenie. Na overenie správnosti výberu teoretických rozdelení sme použili neparametrický test dobrej zhody Kolmogorov-Smirnov pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$. Vypočítané objemy boli znázornené v logaritmicko-pravdepodobnostnej mierke. Na obr. 5 sú vykreslené pravdepodobnosti prekročenia maximálnych ročných objemov pre rôzne hodnoty parametra $t = 2, 5, 10, 15, 20$ dní daných povodňových vln Tople v stanici Hanušovce nad Topľou.



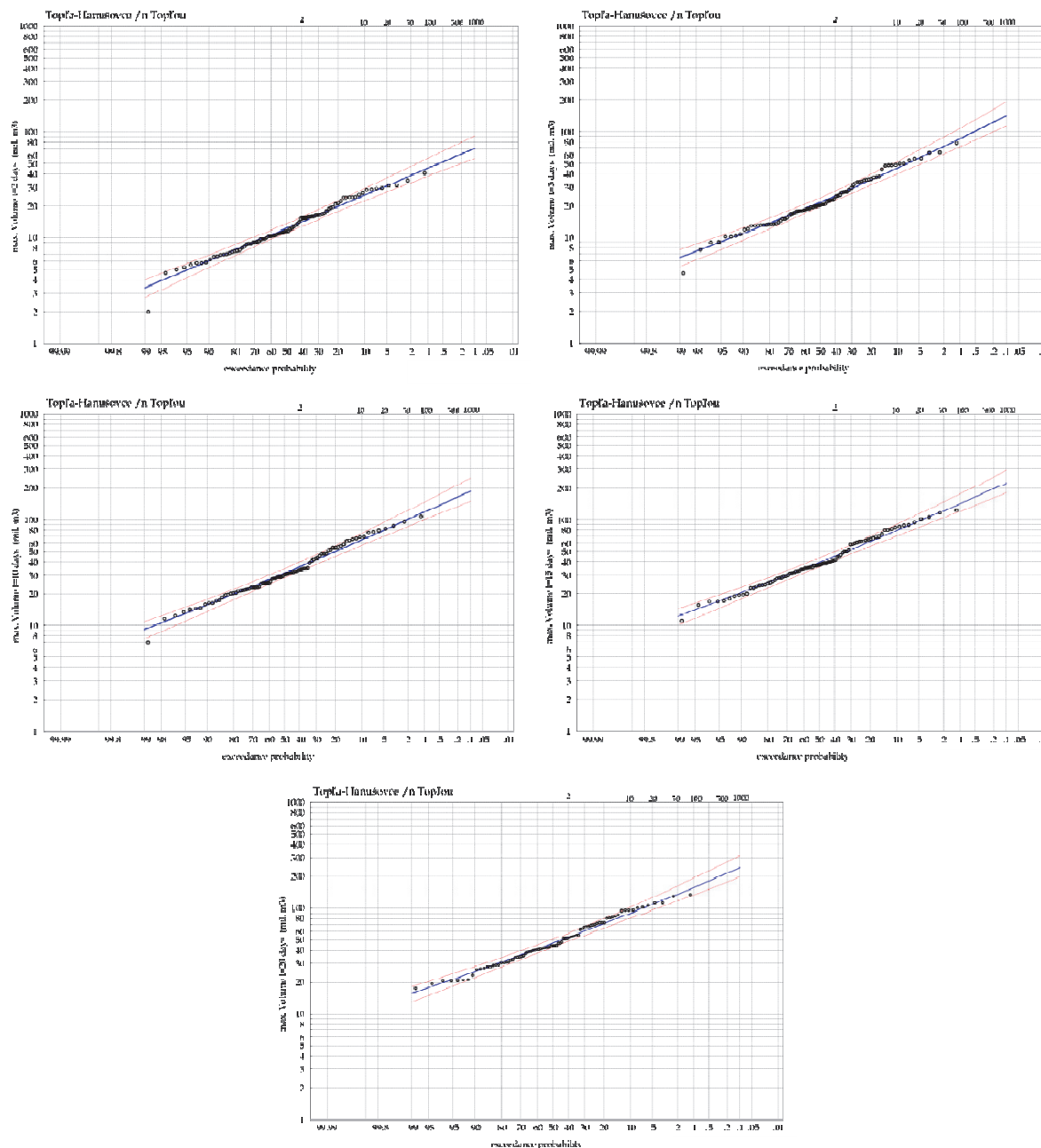
Obr. 3. Schéma určenia maximálneho objemu povodňovej vlny na Topľe v roku 1932 pre $t = 5$ dní.

Fig. 3. A scheme for determining the maximum flood wave volume on Topľa River for flood in 1932 for $t = 5$ days.



Obr. 4 a) – e) Časový priebeh maximálnych ročných objemov rôznych dôb trvania povodňových vln na rieke Topľe: Hanušovce nad Topľou za obdobie 1931 – 2015.

Fig. 4 a)–e) Flood wave annual maximum volumes for various flood duration of the Topľa: Hanušovce nad Topľou during the period 1931–2015.



Obr. 5. Pravdepodobnosti prekročenia maximálnych ročných objemov (V_{max}) odtoku na rieke Topľa: Hanušovce nad Topľou pre zvolené hodnoty $t = 2, 5, 10, 15, 20$ dní.

Fig. 5. Exceedance probabilities of maximum flow volume of Topľa: Hanušovce nad Topľou for different values of $t = 2, 5, 10, 15$ and 20 days.

Rad V_{max} bol zostupne usporiadaný vždy zvlášť pre každé zvolené t a jednotlivým členom radu boli priradené pravdepodobnosti prekročenia. Pravdepodobnosť prekročenia maximálnych ročných objemov vybraných povodňových vln bola vypočítaná podľa vzťahu (2)

$$P = \frac{m}{n+0,4} \quad (2)$$

kde

m – číslo poradia člena v zostupne usporiadanom štatistickom rade,

n – počet rokov uvažovaného obdobia.

Ďalším krokom bol výpočet teoretickej krivky prekročenia maximálnych objemov za použitia LP III. Teoretického rozdelenia pravdepodobnosti pre dané hodnoty doby trvania odtoku a výpočet N -ročných maximálnych objemov odtoku. Vzťah medzi pravdepodobnosťou prekročenia p istej hodnoty v ľubovoľnom roku a jej priemernou dobou opakovania N je (Szolgay, 1994):

$$p = 1 - e^{-1/N}. \quad (3)$$

Pre $N \geq 10$ sa používa zjednodušený tvar:

$$p = 1/N. \quad (4)$$

Ďalším krokom bolo porovnanie zvoleného teoretického rozdelenia LP3 s ďalšími odporúčanými rozdeleniami pravdepodobnosti (Gamma a Log-normalne) podľa OTN ŽTP 3112-1:03. Tabuľka 1 udáva hodnoty odhadnutých N -ročných maximálnych objemov odtoku daného trvania podľa LP III, Gamma a Log-normalneho teoretických rozdelenia pravdepodobnosti. Hodnoty p -value K-S testu dobrej zhody ukázali, že nemôžeme zamietnuť hypotézu pri žiadnom z vybraných teoretických rozdelení pravdepodobnosti, že tieto, dobre vyhovujú pozorovaným údajom na hladine 5% významnosti. Výsledky ukázali pomerne malé rozdiely v hodnotách odhadnutých N -ročných maximálnych objemov pri porovnaní jednotlivých zvolených typov teoretických rozdelení pravdepodobnosti používanými v hydrologic-

kých analýzach extrémov v Slovenskej republike. Najnižšie hodnoty odhadnutých N -ročných V_{tmax} dosiahlo Gamma teoretické rozdelenie pravdepodobnosti, najmä pri objemoch s vysokými hodnotami doby opakovania.

Analýza závislosti maximálnych ročných objemov daného trvania na Tople viacrozmerným modelovaním pomocou kopula funkcií

Pomocou kopula funkcií, ktoré spájajú jednorozmerné marginálne rozdelenia náhodných premenných s ich združeným rozdelením, sme sa snažili spracovávať a analyzovať vzájomnú štruktúru závislosti premenných Q_{max} a V_{tmax} . Podľa Sklarovej (1959) vety, akúkoľvek združenú kumulatívnu distribučnú funkciu $H(x,y)$ dvojice spojitých náhodných premenných (X,Y) môžeme napísať v tvare:

$$H(x,y) = C\{F_{(x)}, G_{(y)}\} \quad (5)$$

kde $F(x)$ a $G(y)$ sú marginálne distribučné funkcie.

Skôr ako sme pristúpili k samotnému viacrozmernému modelovaniu podľa kopula funkcie určili sme si prítomnosť závislosti medzi premennými (Q_{max}, V_{tmax}) , ktorá je vykreslená na obr. 6. Vypočítané hodnoty koeficientov poradových závislostí Spearman ρ a Kendall's τ sú uvedené v tabuľke 2. Za účelom určenia jednorozmerných distribučných funkcií boli využité štandardné štatistické techniky.

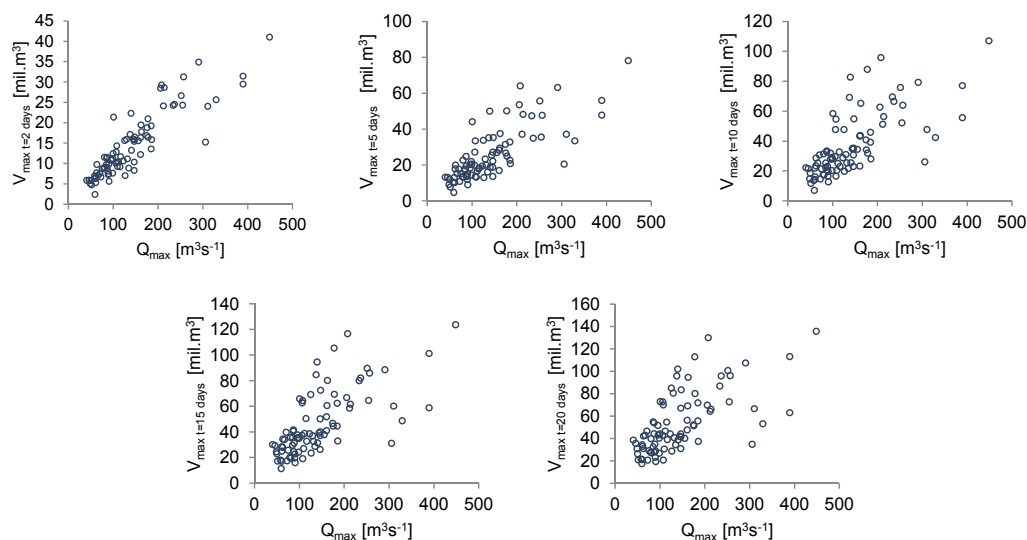
Tabuľka 1. N -ročné maximálne prietoky Q_{max} [$m^3 s^{-1}$] a N -ročné maximálne objemy odtoku V_{tmax} [mil. m^3] na rieke Topľa: Hanušovce nad Topľou pre obdobie 1931 – 2015
Table 1. T -year maximum flows Q_{max} [$m^3 s^{-1}$] a N -years runoff volumes V_{tmax} [mil. m^3], Topľa River: Hanušovce nad Topľou, period 1931–2015

N [roky]	2	5	10	50	100	200	500	1000
P [%]	39	18	9,5	2	1	0,5	0,2	0,1
Q_{max} [$m^3 s^{-1}$]	139	193	249	398	473	556	679	783
Log-Pearson III								
$V_{tmax=2 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	14,3	19,8	25,3	39,0	45,5	52,3	62,0	69,8
$V_{tmax=5 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	24,7	34,6	44,9	72,3	85,9	100,9	123,0	141,6
$V_{tmax=10 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	36,0	50,1	64,4	101,2	119,0	138,2	166,0	189,1
$V_{tmax=15 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	45,1	61,9	78,8	121,8	142,4	164,7	196,7	223,0
$V_{tmax=20 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	53,0	71,4	89,6	134,6	155,9	178,4	210,5	236,6
Log-normal								
$V_{tmax=2 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	14,4	19,2	24,8	37	42,6	48,5	56,6	63,1
$V_{tmax=5 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	24,8	34,7	44,6	69,9	82,0	94,9	113,4	128,5
$V_{tmax=10 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	36,1	50,2	64,4	100,1	117,1	135,2	161	182,0
$V_{tmax=15 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	44,9	61,9	79,2	122,7	143,5	165,6	196,9	222,7
$V_{tmax=20 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	48,3	67,5	87,2	137,9	162,5	192,9	230,9	261,7
Gamma								
$V_{tmax=2 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	14,8	20,1	24,7	34,6	38,6	42,5	47,6	51,3
$V_{tmax=5 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	25,7	35,4	44,2	63,3	71,2	79,7	89,9	97,4
$V_{tmax=10 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	37,4	51,4	64,2	91,6	102,9	114	128,5	139,3
$V_{tmax=15 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	46,4	63,3	78,9	112,4	126,3	139,7	157,4	170,6
$V_{tmax=20 \text{ dni}}$ [mil. m^3]	53,2	72,8	91,2	131,6	148,2	165	186,8	203,1

Pre maximálne ročné prietoky Q_{max} aj pre maximálne objemy V_{tmax} bolo zvolené LP3 teoretické rozdelenie pravdepodobnosti na základe predchádzajúcej časti príspevku. Hodnoty parametrov LP3 rozdelenia sú vypísané v tabuľke 2. V ďalšej časti boli vybrané na výpočet združenej distribučnej funkcie tri Archimedovské kopula funkcie (Claytonova, Gumbel-Hougaardova a Frankova kopula (tab. 3)) so zvolenými marginálnymi distribučnými funkciami. Parametre kopúl boli vypočítané na základe vzťahov s Kendallovým koeficientom korelácie, následne bol určený pre každú kopulu parameter kopula funkcie θ (Karmakar a Simonovic, 2008). V tab. 4 sú vypísané hodnoty parametrov kopula funkcií

a p -hodnoty na hladine významnosti $\alpha=0,05$. Príklad porovnania empirickej kopula funkcie so zvolenými parametrickými kopulami pre $V_{max t=2}$ dni a $V_{max t=15}$ dní je vykreslené na obr. 7.

Z vizuálneho porovnania empirickej a parametrických kopula funkcií je zrejmé, že čím je korelácia medzi premennými tesnejšia, tým je menšia zhoda medzi teoretickou kopulou a empirickou kopula funkciou. Výsledky vzájomného vzťahu maximálnych ročných prietokov a k nim priradených objemov rôznej dĺžky trvania t ukázali najlepšiu zhodu podľa neparametrického testu dobrej zhody Kolmogorov-Smirnovho pre Gumbel-Hougaardovú kopulu.



Obr. 6. Závislosti medzi maximálnym ročným prietokom Q_{max} a maximálnym objemom odtoku V_{tmax} na rieke Topľa: Hanušovce nad Toľou pre zvolené hodnoty $t=2, 5, 10, 15, 20$ dní.
Fig. 6. Relationships between annual peak discharges Q_{max} and maximum wave volumes V_{tmax} of Topľa: Hanušovce nad Toľou for different values of $t=2, 5, 10, 15$ and 20 days.

Tabuľka 2. Hodnoty parametrov LP3 teoretického rozdelenia pravdepodobnosti a hodnoty Spearmanovho ρ a Kendall τ

Table 2. Parameters of the LP3. theoretical distribution and values of the Spearman ρ and Kendall's τ

Log – Pearson III.						
	Q_{max}	$V_{tmax=2dni}$	$V_{tmax=5dni}$	$V_{tmax=10dni}$	$V_{tmax=15dni}$	$V_{tmax=20dni}$
P1	77,23	151,53	229,21	425,35	399,32	244,54
P2	0,06	-0,05	0,04	0,03	0,03	0,03
P3	0,11	9,33	-5,28	-7,92	-6,82	-3,91
	$Q_{max}-V_{tmax=2dni}$	$Q_{max}-V_{tmax=5dni}$	$Q_{max}-V_{tmax=10dni}$	$Q_{max}-V_{tmax=15dni}$	$Q_{max}-V_{tmax=20dni}$	
Spearman	0,88	0,80	0,76	0,73	0,69	
ρ						
Kendall's τ	0,71	0,61	0,56	0,53	0,49	

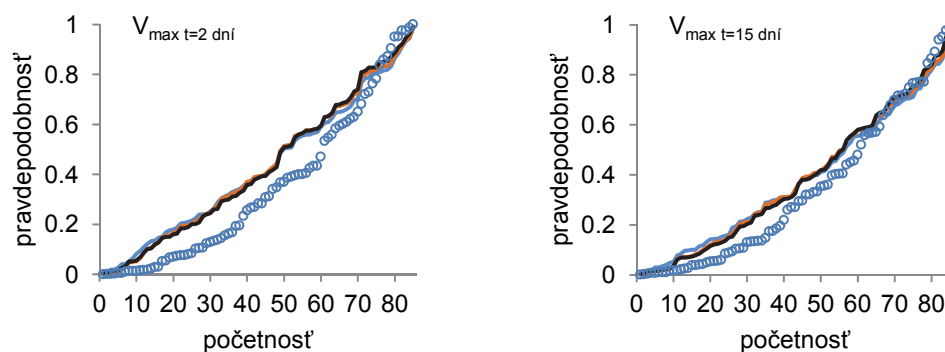
P1 – parameter sklonu, P2 – škálovací parameter, P3 – parameter lokácie

Tabuľka 3. Funkcie pravdepodobností, rozsah parametra kopule, vzťah parametra a Kendallovho τ a funkcia generátora kopule $\varphi(t)$ – Archimedovské kopula funkcie
Table 3. Probability functions, parameter space, generating function and relationship of non-parametric dependence measure with association parameter for the most frequently used Archimedean copulas

Kopula	$C(u, v, \theta)$	parameter θ	Kendall's τ	generátor $\varphi(t)$
Clayton	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$
Gumbel-Hougaard	$\exp[-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}]$	$[1, \infty)$	$\frac{\theta - 1}{\theta}$	$(-\ln t)^\theta$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}]$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$	$1 + \frac{4}{\theta}[D_1(\theta^*) - 1]$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$
Debye function	$D_1 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt \cdot \theta^* = -\log(\theta)$			

Tabuľka 4. Hodnoty parametrov testovaných kopula funkcií (C – Clayton, G-H – Gumbel-Hougaard, F – Frank) pre zvolené kombinácie premenných a výsledky K-S testu
Table 4. Copula parameters (C – Clayton, G-H – Gumbel-Hougaard, F – Frank) for selected combination of the variables and results of the K-S test

	$Q_{\max} - V_{\max=2\text{dni}}$	$Q_{\max} - V_{\max=5\text{dni}}$	$Q_{\max} - V_{\max=10\text{dni}}$	$Q_{\max} - V_{\max=15\text{dni}}$	$Q_{\max} - V_{\max=20\text{dni}}$
C	4,99	3,06	2,51	2,29	1,94
G-H	3,5	2,53	2,26	2,15	1,97
F	12,1	8,2	7,2	6,4	5,6
p-value KS (C)	0,028	0,032	0,098	0,140	0,142
p-value KS (G-H)	0,067	0,071	0,274	0,274	0,375
p-value KS (F)	0,058	0,061	0,199	0,265	0,368



Obr. 7. Porovnanie empirickej kopuly so zvolenými parametrickými kopulami (Clayton, Gumbel-Hougaard Frank) pre $Q_{\max}$ a $V_{\max}$ pre zvolené $t = 2$, a $t = 15$ dní.

Fig. 7. The comparison of the empirical copula with the corresponding values derived by the selected parametrical copulas ((Clayton, Gumbel-Hougaard Frank) for $Q_{\max}$ and $V_{\max}$ with $t = 2$, and $t = 15$ days.

Na obr. 8 sú vykreslené simulácie 1000 párov premenných (prietoku a objemu V_{tmax}) použitím Gumbel-Hougaardovej kopula funkcie. V tabuľke 5 sú vypísané hodnoty maximálnych objemov daného trvania pre zvolené maximálne prietoky na rieke Topľa podľa Gumbel-Hougaardovej kopule.

Združené a podmienené doby opakovania

Pri frekvenčných analýzach hydrologických javov, ktoré sa vyskytujú raz za rok dobu opakovania definuje vzťah (6):

$$T = \frac{1}{P(X \geq x)} = \frac{1}{(1 - F(x))} \quad (6)$$

kde

T – je doba opakovania,

$F(x)$ – jednorozmerná kumulatívna distribučná funkcia.

Pri viacrozmerných štatistických analýzach môžeme definovať dobu opakovania dvoma spôsobmi: združená doba opakovania a podmienená doba opakovania. Združenú dobu opakovania môžeme definovať podľa vzťahu (7) ((Salvadori, 2004).

$$T_{x,y}^{and} = \frac{1}{(1 - F(x) - F(y) + H(x, y))} \quad (7)$$

alebo (8)

$$T_{x,y}^{or} = \frac{1}{(1 - H(x, y))}. \quad (8)$$

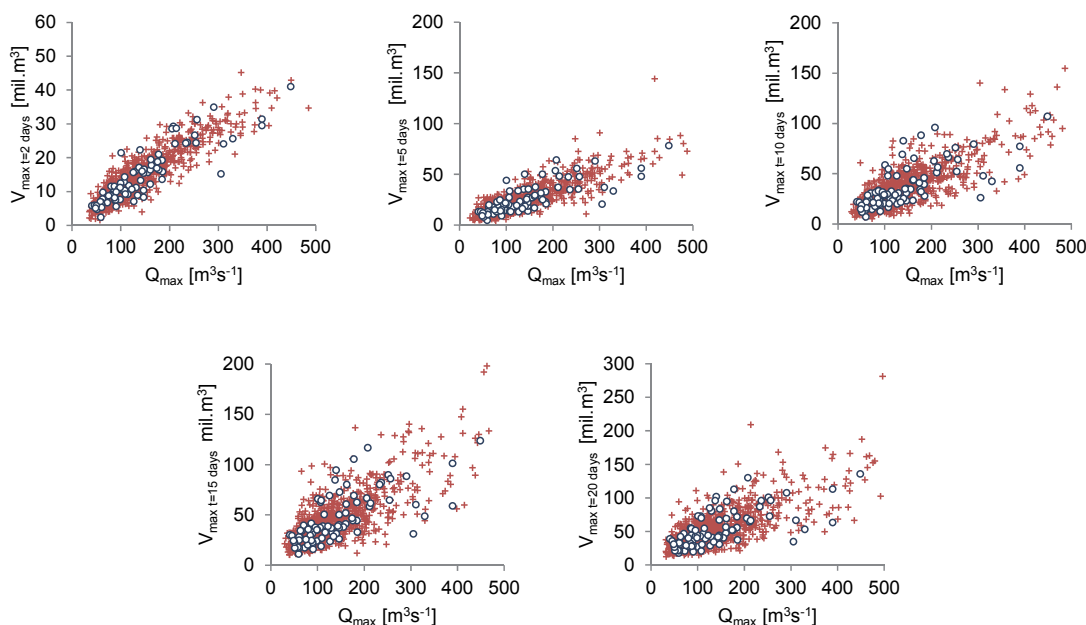
Rovnica (7) reprezentuje združenú dobu opakovania pre $X \geq x$ a $Y \geq y$. Rovnica (8) reprezentuje združenú dobu opakovania pre $X \geq x$ or $Y \geq y$. Tieto vzťahy naznačujú, že rôzne kombinácie X a Y môžu mať rovnaké doby opakovania (podmienka 9). $H(x, y)$ je združená kumulatívna distribučná funkcia, ktorá môže byť vyjadrená kopula funkciou.

$$T_{(x,y)}^{or} \leq \min[T_x, T_y] \leq \max[T_x, T_y] \leq T_{(x,y)}^{and} \quad (9)$$

Podmienená doba opakovania pre X pri danom $Y \geq y$ môžeme vyjadriť podľa vzťahu (10) (Shiau, 2003)

$$T_{(x|y \geq y)} = \frac{1}{(1 - F(y))(1 - F(x) - F(y) + H(x, y))} \quad (10)$$

kde, x a y sú nezávislé premenné a $H(x, y)$ je združená kumulatívna distribučná funkcia, ktorá môže byť vyjadrená kopula funkciou. Príklad hodnôt združenej a podmienenej doby opakovania pre N -ročné maximálne prietoky Q_{max} a N -ročné objemy odtoku $V_{tmax} = 15$ dní na rieke Topľa: Hanušovce nad Topľou pre obdobie 1931 – 2015 sú uvedené v tabuľke 5.



Obr. 8. Simulácia 1000 Q_{max} a V_{tmax} párov použitím vybranej Gumbel-Hougaardovej kopuly.

Fig. 8. Simulations of 1000 pairs of using Q_{max} and V_{tmax} using the Gumbel-Hougaard copula.

Tabuľka 5. Združené a podmienené doby opakovania pre N -ročné maximálne prietoky $Q_{\max}$ [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$] a N -ročné objemy odtoku $V_{t\max} = 15$ dní [mil. m^3] na rieke Topľa: Hanušovce nad Topľou pre obdobie 1931 – 2015.

Table 5. Associated and conditional recurrence times for T -year maximum flows $Q_{\max}$ [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$] and N -year runoff volumes $V_{t\max} = 15$ days [m^3] on the river Topľa: Hanušovce nad Topľou for the period 1931–2015.

N [roky]	P [%]	$Q_{\max}$ [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$]	$V_{t\max} = 15$ dní [mil. m^3]	$F_{Q_{\max}}$	$F_{V_{t\max} = 15 \text{ dní}}$	C_{G-H}	T^{or} [roky]	T^{and} [roky]	$T_{V/Q}$ [roky]
2	39	139	45,1	0,610	0,610	0,505	2	4	9
5	18	193	61,9	0,820	0,820	0,760	4	8	46
10	9,5	249	78,8	0,905	0,905	0,871	8	16	172
50	2	398	121,8	0,980	0,980	0,972	36	80	4006
100	1	473	142,4	0,990	0,990	0,986	73	161	16094
200	0,5	556	164,7	0,995	0,995	0,993	145	323	64512
500	0,2	679	196,7	0,998	0,998	0,997	362	807	403713
1000	0,1	783	223,0	0,999	0,999	0,998	724	1616	1615538

T^{or} a T^{and} – združené doby opakovania, $T_{V/Q}$ – podmienená doba opakovania

Záver a diskusia

V prvej časti príspevku sme použili na odhad N -ročných maximálnych objemov odtoku Tople daného trvania tradičnú metódu odhadu. Pri tradičnom prístupe empirická pravdepodobnosť prekročenia maximálnych objemov vybraných povodňových vln bola porovnaná so zvoleným Log-Pearsonovým teoretickým rozdelením pravdepodobnosti III. typu. Následne boli odhadnuté maximálne objemy rôznej doby trvania podľa LP3 rozdelenia porovnané s dvoma ďalšími teoretickými typmi rozdelenia používanými v SR: Log-normálnym a Gamma rozdelením pravdepodobnosti. Výsledky ukázali:

- vysokú citlivosť LP3 rozdelenia na zaradenia extrémov do podkladových radov údajov. Môžeme konštatovať, že toto rozdelenie je vhodné pre odhad návrhových hodnôt s vyššou hodnotou doby opakovania;
- pomerne malé rozdiely v hodnotách odhadnutých N -ročných maximálnych objemov pri porovnaní jednotlivých zvolených typov teoretických rozdelení pravdepodobnosti používanými v hydrologických analýzach extrémov v Slovenskej republike;
- najnižšie hodnoty odhadnutých N -ročných objemov danej doby trvania $V_{t\max}$ dosiahlo Gamma teoretické rozdelenie pravdepodobnosti, najmä pri objemoch s vysokými hodnotami doby opakovania.

Pri interpretácii výsledkov je treba mať na pamäti, že hodnoty N -ročných objemov s veľmi vysokými hodnotami doby opakovania sú extrapolované hodnoty, a že každá štatistická metóda je zaťažená určitou neistotou, ktorá môže byť zapríčinená samotnou metódou ale aj samotnými údajmi, ktoré môžu byť zaťažené určitou chybou merania.

Vzhľadom na to, že povodňová vlna je viacrozmerná

hydrologická udalosť vznikla potreba modelovať vývoj dvoch rizikových hydrologických faktorov, ktoré sú na seba do istej miery závislé. Aj z tohto dôvodu boli v druhej časti na určenie N -ročných maximálnych objemov odtoku Tople daného trvania pre dvojrozmerné modelovanie vybrané tri Archimedovské kopula funkcie. Ako marginálne rozdelenie pravdepodobnosti bolo použité nami zvolené LP3 teoretické rozdelenie. Výsledky analýzy extrémnych hydrologických udalostí na Tople a vzájomný vzťah maximálnych ročných prietokov rôzneho a k nim priradených objemov rôznej doby trvania ukázali:

- z vizuálneho porovnania empirickej a parametrickej kopula funkcií je zrejmé, že čím je korelácia medzi premennými tesnejšia tým je menšia zhoda medzi teoretickou kopulou a empirickou kopula funkciou;
- rozdiel medzi zvolenými teoretickými kopula funkciami nie je významný, ale ako najvhodnejšia z hľadiska zachovania a sledovania vzájomnej závislosti premenných sa ukázala Gumbel-Hougaardova kopula;
- následne boli vypočítané združené a podmienené doby opakovania pre N -ročné maximálne ročné prietoky $Q_{\max}$ a N -ročné objemy odtoku rôznej doby trvania $V_{t\max}$ na rieke Topľa.

Výsledky dosiahnuté analýzou zhody akýchkoľvek premenných charakterizujúcich prietokovú vlnu (prietok, objem, postupová doba) môžu významne prispieť k spoľahlivejšiemu posúdeniu povodňového nebezpečenstva, pretože dávajú prehľad o povodňovej udalosti ako celku. Praktické využitie týchto výsledkov môže byť použité pri návrhoch ochranných stavieb, na jednej strane je to, návrh stupňa ochrany a na druhej, ekonomické hľadisko.

Pod'akovanie

Táto práca bola podporovaná projektom VEGA 2/0009/15 a realizáciou projektu ITMS 26240120004 Centrum excelentnosti integrovanej protipovodňovej ochrany územia, na základe podpory operačného programu Výskum a vývoj financovaného z Európskeho fondu regionálneho rozvoja.

Literatúra

- Báčová Mitková, V., Halmová D. (2014): Joint modeling of flood peak discharges, volume and duration: a case study of the Danube River in Bratislava. *J. Hydrol. Hydromech.*, Vol. 62, No. 3, 2014, p. 186 – 196, doi: 10.2478/johh-2014-0026.
- Beard, L. R. (1956): Statistical evaluation of Runoff Volume frequencies. Symposium Dorcy, IASA, Dijon.
- Bobee, B. (1975): The Log Pearson Type 3 Distribution and Its Application in Hydrology. *Water Resources Research*, Vol. 11, No. 5, pp. 681 – 689.
- Fan, Y.R., Huang, W., Huang, G.H., Li, Y.P., Huang K. (2016): Hydrologic risk analysis in the Yangtze River basin through coupling Gaussian mixtures into copulas. *Adv. Water Resour.*, 88 (2016), pp. 170 – 185, <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2015.12.017>.
- Fendeková, M., Poárová, J., Slivová V. (2017): Hydrologické sucho na Slovensku a prognóza jeho vývoja. *UK Bratislava, Prírodovedecká fakulta*, p. 298. ISBN978-80-223-4398-5.
- Guo Y, Adams B. (1998): Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models I. Runoff volume. *Water Resources Research* 34(12): 3421 – 3431. <https://doi.org/10.1029/98WR02449>
- Halmová, D., Pekárová P., Pekar J., Onderka, M. (2008): Analyzing temporal changes in maximum runoff volume series of the Danube River. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 4 (2008) 012007, IOP Publishing, p. 1 – 8. doi:10.1088/1755-1307/4/1/012007.
- Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. (1997): *Regional Frequency Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kohnová, S., Papaioannou, G. J. Bacigál, T., Szolgay, J., Hlavčová, K., Loukas, A., Výleta, R. (2017): On the suitability of the copula types for the joint modelling of flood peaks and volumes along the Danube River. In *Geophysical Research Abstracts*. Volume 19/2017: [elektronický zdroj] the open-access abstracts of the EGU General Assemblies. Göttingen : Copernicus Publications.
- Mediero, L., Jiménez-Álvarez, A., Garrote, L. (2010): Design flood hydrographs from the relationship between flood peak and volume. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 14, 2495 – 2505.
- Mitková, V., Pekárová, P., Babiaková, G. (2002): Maximum runoff volumes of different duration of the Danube River in dry and wet periods. *Acta Hydrologica Slovaca*, Vol. 3, No. 2, p. 185 – 191.
- Nejc Bezak, Alja Horvat, Mojca Šraj (2015): Analysis of flood events in Slovenian streams. *J. Hydrol. Hydromech.*, Vol. 63, No. 2, 2015, p. 134 – 144, doi: 10.1515/johh-2015-0014.
- Paquet, E., Garavaglia, F., Garçon, R., Gailhard, J. (2013): The SCHADEX method: a semi-continuous rainfall-runoff simulation for extreme flood estimation. *J. Hydrol.*, 495 (2013), pp. 23 – 37. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.04.045>
- Pekárová, P., Garaj M., Pekár J., Miklášek P. (2018): Long-term development of hydrological balance in the Topľa basin in 1961–2015. Part I: Changes of water storage in monthly step in the Topľa basin. *Acta Hydrologica Slovaca*, Vol. 19, No. 1, p. 17 – 26
- Rao, D. V. (1980a): Log Pearson Type 3 Distribution: A Generalized Evaluation. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 106, No. HY5, May 1980a, pp. 853 – 872.
- Rao, D.V. (1980b): Log Pearson Type 3 Distribution: Method of Mixed Moments. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 106, No. HY6, June 1980b, pp. 999 – 1019.
- Salvadori, G., De Michele, C. (2004): Frequency analysis via copulas: theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resour Res.* 40, W12511.
- Sklar, A. (1959): *Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges*. Publications de L'Institut de Statistique, Université de Paris, 229 – 231.
- Šraj, M., Bezak, N., Brilly, M. (2014): Bivariate flood frequency analysis using the copula function: a case study of the Litija station on the Sava River. *Hydrol Process*. doi: 10.1002/hyp.10145.
- Szolgay, J., Gaál, L., Bacigál, T., Kohnová, S., Hlavčová, K., Výleta, R., Parajka J., Blöschl, G. (2016): A regional comparative analysis of empirical and theoretical flood peak-volume relationships. *J. Hydrol. Hydromech.*, Vol. 64, No. 4, 2016, p. 367 – 381, doi: 10.1515/johh-2016-0042.
- Szolgay, J., Kohnová, S., Bacigál, T., Hlavčová, K. (2012): Proposed flood: Joint probability analysis of maximum discharges and their pertaining volumes. *Acta Hydrologica Slovaca*, Vol. 13, No. 2, 289 – 296.
- Zhang, L., Singh, V.P. (2006): Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *J Hydrol. Eng. ASCE*, 11(2), 150–164.

ANALYSIS OF MAXIMUM RUNOFF VOLUMES WITH DIFFERENT TIME DURATION OF FLOOD WAVES ON THE TOPLA EIVER

The first part of the paper deals with the determination of the annual maximum discharge volumes on the Topľa River for the duration of 2-, 5-, 10-, 15- and 20-days (V_{tmax}). The series of 84 years (1931–2015) mean daily discharges were analysed. The empirical probability

distribution of the data was compared with the theoretical Log-Pearson probability distribution. Subsequently, the maximum volumes with different time duration estimated by Log-Pearson distribution type III (LP 3) were compared with two other

theoretical distribution types used in Slovakia: Log-normal and Gamma probability distribution. The results showed:

- the high sensitivity of the LP3 distribution to extremes of the dataset. We can say that this probability distribution is appropriate for design hydrological values with higher values of the return period;
- relatively small differences in the values of estimated T -year maximum volumes in compared types of theoretical probability distributions used in hydrological analyses of extremes in the Slovak Republic;
- the lowest values of estimated T -year volumes of a given duration, achieved Gamma theoretical probability distribution, especially for volumes with high repeat times.

The flood wave is a multidimensional hydrological event depends on many factors. Therefore there is a need to know interdependence and model two hydrological factors that are somewhat dependent on themselves. The second part of our paper was focused on bivariate analysis of the relationship between N -year maximum volumes with different duration and peak discharges by the three Archimedean copula functions (Clayton, Gumbel-Hougaard and Frank). The LP III distribution was used as marginal probability distribution function. The results of this analysis showed:

- from a visual comparison of the empirical and parametric copula functions, it was evident that the correlation between variables is lower, than the match between the theoretical and the empirical copulas is lower too;
- the difference between the selected theoretical copulas was not significant, but Gumbel-Hougaard copula was the most suitable for maintaining and monitoring the interdependence of the variables;
- subsequently joint and conditional return periods of the T -year maximum annual flows and T -year volumes with different time duration on Topľa river, were calculated. The first one defines joint return periods as: the return periods using one random variable equalling or exceeding a certain magnitude and/or using another random variable equalling or exceeding another certain magnitude. The second one is conditional return periods for one random variable, given that another random variable equals or exceeds a specific magnitude.

The results obtained from the bivariate as well as multidimensional analysis of the variables, which characterize the hydrological waves (flow, volume, time) can contribute to more reliable assessment of flood risks. Hence, they give an overview of the flood event as a whole and might be practically used in water management and in the design of flood protective systems.

Ing. Veronika Bačová Mitková, PhD.
RNDr. Pavla Pekárová, DrSc.
Ústav hydrológie SAV
Dúbravská cesta 9
941 04 Bratislava
E-mail: mitkova@uh.savba.sk