

ANALÝZA ZMIEN PRIEMERNÝCH MESAČNÝCH PRIETOKOV NA SLOVENSKU V POSLEDNÝCH DESAŤROČIACH

Mária Ďurigová, Kamila Hlavčová, Magdaléna Komorníková,
Jana Kalická, Dominika Ballová, Tomáš Bacigál

Analýza hydrometeorologických časových radov predstavuje dôležitú súčasť posudzovania zmien hydrologických procesov. Pochopenie zmien časových radov prináša lepšie pochopenie príčin týchto zmien. Časové rady údajov je možné podrobiť veľkému množstvu analýz, jednými z nich je aplikácia štatistických metód. Tento článok sa zaoberá analýzou vnútornej štruktúry a zmien priemerných mesačných, ročných a sezónnych prietokov vo vybraných vodomerých staniách na Slovensku pomocou základnej popisnej štatistiky, trendovej analýzy, analýzy periodickej zložky, AR-ARCH modelu a viacrozmernej analýzy. Uvedené metódy boli aplikované na piatich väčších povodiach v rámci Slovenska a siedmich menších povodiach nachádzajúcich sa v severnej časti povodia Váhu. Výsledky poukazujú na najväčšie zmeny (v trendovej a periodickej zložke) na toku Hron. Z menších povodí, najmä toky Kysuca a Bystrica vykazujú štatisticky významne klesajúce trendy.

KLÚČOVÉ SLOVÁ: štatistické metódy, priemerné mesačné prietoky, trendová analýza, AR-ARCH model

THE CHANGE ANALYSIS OF THE MEAN MONTHLY DISCHARGES IN SLOVAKIA IN RECENT DECADES. An analysis of a hydrometeorological time data series is an important part in assessing changes in hydrological processes. Understanding changes in time series results in a better understanding of the causes of these changes. A time data series can be evaluated by a large number of analyses. One of them is the application of statistical methods. The article deals with a basic analysis of the mean monthly, annual, and seasonal discharges in selected stage-discharge gauging stations in Slovakia using statistical methods. The time data series were subjected to basic descriptive statistic, trend and periodicity analyses, and AR-ARCH model. These methods were applied to five larger basins in Slovakia and seven smaller basins located in the northern part of the Váh River basin. The results show greatest changes (in trend and periodic analysis) in the Hron River. From the smaller river basins, especially Kysuca and Bystrica River, there are statistically significant decreasing trends.

KEY WORDS: the statistical methods mean monthly discharges, trend analysis, AR-ARCH model

Úvod

Nepravidelne časovo a priestorovo rozdelené množstvo vody v krajine, negatívne ovplyvnenie hydrologického systému zmenou klímy a antropogénnou činnosťou spôsobuje čoraz väčšiu neistotu v hospodárení s vodou. Objem vody vstupujúci do povodia závisí od rôznych meteorologických a klimatických činiteľov a proces formovania odtoku v povodí závisí od geologickej stavby, pôdných vlastností, morfológie povodia, vegetácie a spôsobu využitia krajiny (Bronstert a kol., 2002). Vzhľadom na zmenu klímy je potrebné neustále prehodnocovať všetky

hydrologické a meteorologické prvky a ich zmeny. Pre potreby identifikovania zmien v hydrologickom režime sa využíva množstvo metód. Jednou z možností analýzy hydrometeorologických dát je aplikovanie štatistických metód.

U nás sa analýze zmien režimu prietokov venovali napríklad Škoda a kol. (2008), zaoberajúci sa minimálnymi prietokmi a početnosťou výskytu minimálnych mesačných prietokov v jednotlivých dekádach na Slovensku. Použitá trendová analýza bola aplikovaná na rady ročných minimálnych prietokov a rady minimálnych 7-dňových prietokov. Výsledky analýzy ukazujú rôznorodý

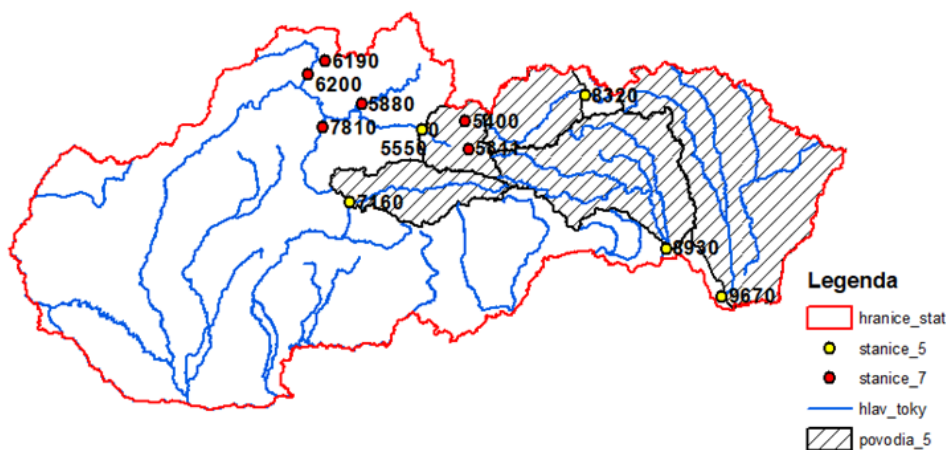
vývoj týchto charakteristík na Slovensku. Halmová a Pekárová (2013) analyzovali minimálne a maximálne denné prietoky v stanici Belá – Podbanské. Skúmali obdobie 1929 – 2011, ktoré rozdelili do viacerých kratších časových úsekov. Pomocou neparametrického Mann-Kendall testu testovali jednotlivé kratšie obdobia a aj celé sledované obdobie. Výsledky analýz naznačujú potrebu analyzovania čo najdlhších časových radov. Pramuk a kol. (2013) sa zaoberali výskytom povodní na Dunaji s dlhým radom pozorovania od 1876 do 2010. Pomocou frekvenčnej analýzy identifikovali zvyšovanie početnosti povodní a zároveň, že ich trvanie sa skracaje. Výskyt januárových povodní sa znižuje a menšie povodne sa začali vyskytovať v období od septembra do decembra. Pramuk a kol. (2016) a Pekárová a kol. (2017) sa venovali analýze dlhodobých zmien povodňových prietokov na Slovensku. Vybrané vodomerné stanice a ich denné prietoky s dobou pozorovania rozdelené na dve obdobia (1931 – 1972 a 1973 – 2014) boli hodnotené s cieľom analýzy zmien hydrologického režimu a taktiež boli hodnotené vplyvy zrážok a teploty vzduchu na odtok z územia SR. Autori identifikovali mierne klesajúce trendy prietokov, zvyšovanie výparu a taktiež významné zníženie koeficientu odtoku. Hydrologickým suchom v rámci 77-mich staníc po celom Slovensku sa venovali Danáčová a kol. (2015). Zamerali sa na spôsoby hodnotenia málo vodných období, ktoré demonštrovali na roku 2012 patriaci medzi najsuchšie roky za posledné dekády. Autori zhodnotili, že pre lepší monitoring hydrologického sucha je potrebné dostatočné množstvo operatívnych údajov z meraní povrchových vôd a dostatočná databáza historických meraní. Výsledky zahraničných prác od Bronsterta a kol. (2002), Schönwiesera a Rappa (1997) v Nemecku poukazujú na stúpajúci trend prietokov na rieke Rýn, spôsobený zvýšením množstva zimných zrážok. Petrow a Merz (2009) sa venovali frekvencii záplav v Nemecku, kde tiež detegovali ich rastúci trend. Bawden a kol. (2014) sa zaoberali analýzou trendov a variability hydrologického režimu

v povodí kanadskej rieky Athabasca a okolitých povodí. V štúdiu bolo použitých až dvadsať hydrologických premenných. Analýza pomocou neparametrického Mann-Kendall testu ukázala klesajúce trendy v prietokoch najmä v letnom období. Skúmaním rieky Lena na východnej Sibíri a jej hydrologickej reakcie na zmenu klímy sa zaoberali Gautier a kol. (2018). Skúmali povodňový vývoj rieky Lena, ktorá sa nachádza v najchladnejšej oblasti severnej pologule. Zistili, že jarné povodňové prietoky sa zvýšili, taktiež frekvencia vrcholových prietokov sa zvýšila a začiatok povodne je menej predvídateľný. Letné povodne sú častejšie a intenzívnejšie.

V tomto článku bola použitá základná popisná štatistika, trendová analýza, analýza periodickej zložky a AR-ARCH model. Jednotlivé metódy boli aplikované na piatich väčších povodiach nachádzajúcich sa na území Slovenska a na siedmich menších povodiach nachádzajúcich sa v severnej časti povodia Váhu. Skúmané boli priemerné mesačné, ročné a sezónne prietoky na vybraných vodomerných staniciach na Slovensku. Na základe aplikovaných metód bola vybratá jedna vodomerná stanica, na ktorej bola použitá viacrozmerná analýza.

Údaje

Na analýzu zmien bolo vybratých päť vodomerných staníc v rámci Slovenska, označené žltými bodmi a vyznačeným povodím a sedem vodomerných staníc zo severnej časti povodia Váhu označené červenými bodmi (obr. 1, tab. 1). Vybrané vodomerné stanice sa nachádzajú v strednej a východnej časti Slovenska, ktoré mali dlhé rady pozorovaní. Analyzované obdobie je od roku 1963 do 2016, teda 54 rokov. Časové rady údajov priemerných mesačných prietokov boli poskytnuté Slovenským hydrometeorologickým ústavom. Rieka Bodrog po vodomernú stanicu Streda nad Bodrogom má maximálne prietoky najmä v mesiacoch marec a apríl, minimálny prietok v auguste a septembri. Ročné úhrny zrážok sa pohybujú od 550 mm v južnej časti povodia až do 1000 mm



Obr. 1. Mapa použitých vodomerných staníc s vyznačením piatich povodí na území SR.
Fig. 1. The map of the gauging stations with marked areas of five catchments of Slovakia.

Tabuľka 1. Zoznam vodomerných staníc s prislúchajúcimi plochami povodí
Table 1. The river basin list and its catchment area

Tok	Vodomerná stanica	Číslo stanice	Plocha povodia [km ²]
Bodrog	Streda nad Bodrogom	9670	11 474,25
Hron	Banská Bystrica	7160	1 766,48
Hornád	Ždaňa	8930	4 232,20
Váh	Liptovský Mikuláš	5550	1 171,12
Poprad	Chmeľnica	8320	1 262,41
Povodie Váhu			
Váh	Liptovský Mikuláš	5550	1 117,12
Kysuca	Kysucké Nové Mesto	6200	955,09
Bystrica	Zborov n. Bystricou	6190	218,07
Turiec	Martin	6130	827
Orava	Dierová	5880	1 966,75
Belá	Podbanské	5400	93,49
Čierny Váh	Čierny Váh	5311	243,06

v severnej a v severovýchodnej časti povodia. Rieka Hron po vodomernú stanicu Banská Bystrica má maximálne prietoky najmä v jarných mesiacoch od marca do apríla a minimálne prietoky sa najčastejšie objavujú v mesiaci september. Ročný úhrn zrážok sa pohybuje od 800 mm do 1200 mm.

Rieka Hornád po vodomernú stanicu Ždaňa má maximálne prietoky najmä v marci, apríli a máji. Minimálne prietoky sa objavujú najčastejšie v septembri. Ročný úhrn zrážok je od 700 do 900 mm (MŽP, 2011).

Povodie rieky Poprad po vodomernú stanicu Chmeľnica je charakteristické maximálnymi prietokmi v máji a júni, minimálne prietoky sa vyskytujú najmä v mesiacoch január a február. Ročný úhrn zrážok na povodie je okolo 880 mm.

Rieka Váh po vodomernú stanicu v Liptovskom Mikuláši je charakteristická maximálnymi prietokmi najmä v mesiaci apríl a minimálnymi prietokmi v januári a februári. Ročný úhrn zrážok je okolo 1100 mm (Fendeková a kol., 2017). V tomto povodí sa taktiež nachádza vodomerná stanica Podbanské na toku Belá a vodomerná stanica Čierny Váh na toku Čierny Váh, ktoré boli použité v analýze siedmich povodí v rámci povodia Váhu.

Nasledujúce opísané toky boli tiež použité v analýze siedmich povodí a nachádzajú sa v povodí Váhu.

Toky Turiec s vodomernou stanicou v Martine a tok Orava s vodomernou stanicou Dierová majú maximálne prietoky najmä v apríli a v období od júna do augusta. Minimálne prietoky sa vyskytujú od augusta do októbra a v januári.

Tok Kysuca po vodomernú stanicu v Kysuckom Novom Meste má maximálne prietoky najmä v apríli a minimálne prietoky sa vyskytujú v septembri, prípadne v januári. Priemerný úhrn zrážok na povodie je okolo 1060 mm za rok (Fendeková a kol., 2017). V povodí Kysuce sa nachádza tok Bystrica s vodomernou stanicou Zborov n. Bystricou.

Metodika

Súbor štatistických metód bol použitý na analýzu priemerných mesačných, ročných a sezónnych prietokov vo vybraných vodomerných staniaciach. Priemerné mesačné prietoky letnej sezóny boli zadefinované od mája do októbra a priemerné mesačné prietoky zimnej sezóny boli zadefinované ako obdobie od novembra po apríl. Časové rady údajov boli podrobené popisnej štatistike, ktorá obsahuje identifikáciu maximálneho a minimálneho prietoku, medián, parameter normálneho rozdelenia a rozptyl, ďalej bola aplikovaná trendová analýza, analýza periodickej zložky a model reziduálnej zložky. Výsledky analýz boli použité na výber jednej vodomernej stanice, ktorá bola použitá vo viacrozmernej analýze. Výpočty boli uskutočnené v programe Mathematica a výsledky boli vyhodnotené s hodnotou pravdepodobnosti $P = 0,05$.

Dekompozícia časových radov

Časové rady môžu byť rozložené na 4 základné zložky: Trend T_t ; popisuje dlhodobý vývoj v priemernom správaní sa časového radu. Vzniká ako dôsledok síl, ktoré systematicky pôsobia v rovnakom smere. Vyjadruje teda dlhodobý nárast (resp. pokles). Trend v časových radoch je možné popísať napr. pomocou trendových funkcií. Toto vyjadrenie sa používa, ak vývoj časového radu zodpovedá určitej funkcii času, napr. lineárnej, kvadratickej a pod.

Sezónna zložka S_t ; opisuje periodické zmeny v časovom rade, ktorých perióda L sa rovná určitej štandardnej jednotke času alebo jej konštantnému násobku. Sezónna zložka je charakterizovaná aj ako korelačná závislosť medzi i -tým a $(i+k)$ -tým prvkom časového radu, kde k je posunutie. Periódou L teda určujeme z korelogramu. Je to hodnota, v ktorej (a jej násobkoch) korelogram nadobúda lokálne maximum. Sezónnu zložku môžeme popísať napr.

harmonickou funkciou.

Cyklická zložka C_t ; je periodická zložka, ktorej perióda nezodpovedá kalendárnym jednotkám. Je to nepravidelná fluktuácia okolo trendu, v ktorej sa strieda fáza rastu s fázou poklesu. Vyjadrujeme ju ako súčet sínusov a kosínusov s rôznymi frekvenciami a amplitúdami. Frekvencia ω sa udáva v radiánoch za jednotku času. Dĺžka periódy, teda čas, za ktorý sa uskutoční jeden cyklus je $L = \frac{2\pi}{\omega}$.

Významné frekvencie určujeme pomocou spektrálnej analýzy, napríklad z grafu výberovej spektrálnej hustoty (periodogramu) a pomocou Fisherovho testu periodicity (pozri Cipra, 1986).

Reziduálna zložka e_t : ostane v časovom rade po odstránení systematických zložiek. Je tvorená fluktuáciami v priebehu časového radu, ktoré nemajú rozpoznateľný systematický charakter.

Dekompozícia časového radu môže byť:

- aditívna – hodnoty časového radu sa dajú určiť ako súčet jednotlivých zložiek:

$$X_t = T_t + S_t + C_t + e_t \quad (1)$$

- multiplikatívna – hodnoty časového radu sa dajú určiť ako súčin hodnôt jednotlivých zložiek:

$$X_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot e_t \quad (2)$$

Trend, sezónna a cyklická zložka sú deterministické (systematické) zložky. Časové rady spravidla obsahujú reziduálnu zložku. Okrem nej môžu, ale nemusia obsahovať aj jednu, dve alebo všetky tri systematické zložky (Box a Jenkins, 1976; Cipra, 1986).

Model reziduálnej zložky AR-ARCH

Lineárne stacionárne procesy môžeme modelovať triedou lineárnych modelov známych ako ARMA (p, q) modely. Aparát, ktorý sa pritom používa je známy ako *Box – Jenkinsova metodológia* (Box a JenkinS, 1976). Táto metodológia berie za základný prvok analýzy reziduálnu zložku, tvorenú korelovanými alebo závislými náhodnými veličinami.

Základným predpoklad týchto modelov je:

1. Hodnota náhodnej premennej X_t v čase t závisí len na predchádzajúcich náhodných premenných (deterministická časť) a na náhodných fluktuáciách (stochastická časť).
2. Závislosť X_t na predchádzajúcich p náhodných premenných $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ je lineárna.

Autoregresný proces rádu p AR(p) je popísaný rovnicou

$$X_t = \varphi + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + u_t \quad (3)$$

kde $\varphi_p \neq 0$ a u_t je proces bieleho šumu s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_u^2 .

ARCH modely

Časové rady, ktorých dlhodobý nepodmiernený rozptyl je konštantný, ale sú obdobia, kedy je relatívne vysoký, sa nazývajú **podmiene ne heteroskedastické**. Jedným z modelov, v ktorom podmiernený rozptyl v čase t závisí na minulých pozorovaniach nelineárne, je model časového radu s *autoregresnou podmiernenou heteroskedasticitou*, model ARCH.

Nech u_t je časový rad s rozptylom $D[u_t] = \sigma^2$, ktorý môžeme vyjadriť v tvare

$$u_t = v_t \sqrt{h_t} \quad (4)$$

pričom pre funkciu h_t platí

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 \quad (5)$$

kde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ a $\{v_t\}$ je biely šum nezávislý na h_{t-k} , pre ktorý platí $E[v_t] = 0$ a $D[v_t] = 1$. Potom u_t je časový rad s **autoregresnou podmiernenou heteroskedasticitou rádu m** (*AutoRegressive Conditionally Heteroskedastic*) a jeho model označujeme ARCH(m).

Nech časový rad x_t je generovaný procesom X_t v tvare

$$X_t = E[X_t | \Omega_{t-1}] + u_t \quad (6)$$

kde Ω_{t-1} je informačná množina obsahujúca všetky relevantné informácie až do času $t - 1$. Predikovateľná časť $E[X_t | \Omega_{t-1}]$ je modelovaná lineárnymi AR (p) modelmi a u_t je nepredikovateľná časť modelovaná ARCH(m) modelmi. Potom model časového radu x_t nazývame AR-ARCH (Box a Jenkins, 1976; Cipra, 1986; Engle, 1982).

Viacrozmerná analýza

Štatisticky významné korelácie medzi zrážkami a prietokmi ($\alpha = 0,05$) umožňujú aplikovanie viacrozmernej regresnej analýzy. Priemerné mesačné prietoky sme modelovali pomocou dvoch nezávislých premenných – mesačných úhrnov zrážok prislúchajúce k povodiu za daný mesiac a priemerných mesačných prietokov za mesiac predošlý. Po odstránení trendu sme analyzovali periodickú a reziduálnu zložku a preložili sme výsledný model, ako aj vypočítali niektoré významné štatistické ukazovatele. Keďže do regresnej funkcie vstupuje aj priemerný mesačný prietok s oneskorením jeden mesiac, viacrozmerná analýza bola v tomto prípade vykonaná pre obdobie 1964 – 2016 (na obr. 2 je 3D vizualizácia mesačných prietokov v závislosti od mesačných zrážok a mesačných prietokov s oneskorením jeden mesiac).

Výsledky

Výsledky použitých analýz boli rozdelené do dvoch častí. V prvej časti sú opísané výsledky piatich vybraných vodomerých staníc a viacrozmerná analýza vybranej vo-

domernej stanice, a v druhej časti sú výsledky siedmich vybraných vodomerných staníc nachádzajúcich sa v severnej časti povodia Váhu.

Analyza piatich vybraných vodomerných staníc na Slovensku

Výsledky obsahujú globálnu analýzu priemerných mesačných prietokov, ktorá je zložená z výsledkov popisnej štatistiky, analýzy trendov, periodickej zložky a modelu reziduálnej zložky pre priemerné mesačné a ročné prietoky. Nasleduje analýza priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a po sezónach, ktorá pozostáva z trendovej analýzy priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a trendovej analýzy priemerných mesačných prietokov v letnej sezóne, ktorá je zadaná od mája do októbra a priemerných mesačných prietokov v zimnej sezóne, ktorá je zadaná od novembra po apríl.

Globálna analýza priemerných mesačných prietokov

V rámci popisnej štatistiky boli použité priemerné mesačné prietoky z celého sledovaného obdobia od 1963 do 2016. V tab. 2 sa nachádzajú identifikované minimálne (*Min*) a maximálne (*Max*) priemerné mesačné prietoky, mediány - stredné hodnoty (*Med*), parametre normálneho rozdelenia (μ) a rozptyly (σ). Najväčšie hodnoty charakteristík popisnej štatistiky boli identifikované pre riekú Bodrog, ktorý má aj najväčšiu plochu povodia k prislúchajúcej vodomernej stanici, teda mal aj najväčší rozptyl hodnôt priemerných mesačných prietokov.

Nasledujúce štatistické metódy boli aplikované na priemerné mesačné prietoky za celé sledované obdobie a taktiež na priemerné ročné prietoky. Časové rady boli dekomponované a podrobené testovaniu so štatistickou

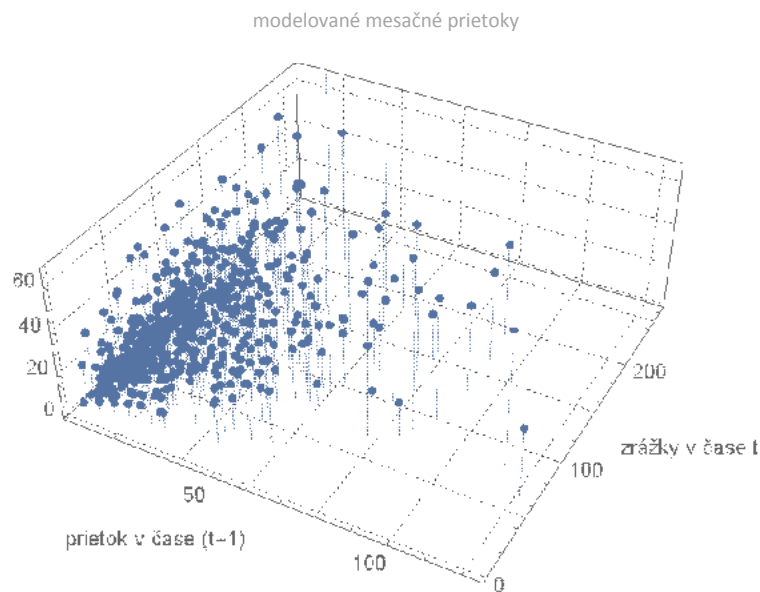
významnosťou na hladine $P = 0,05$.

Analyza trendov priemerných mesačných prietokov preukázala štatisticky významný klesajúci trend na toku Hron. Ostatné vodomerné stanice na tokoch Bodrog, Hornád, Váh a Poprad nemali identifikovaný trend (tab. 3 stĺpec *Trend v mes.*). Analýza trendov aplikovaná na priemerné ročné prietoky potvrdila štatisticky významný klesajúci trend na rieke Hron. Na ostatných tokoch nebol identifikovaný štatisticky významný trend (tab. 3 stĺpec *Trend v rokoch*).

Periodická zložka priemerných mesačných prietokov preukázala štatisticky významnú periódu každých necelých 5 rokov (58,9 mesiacov) na Hrone, Hornáde a Poprade. Dvojročná perióda bola identifikovaná na toku Hron (tab. 3 stĺpec *Perióda [mesiac]*). Všetky toky okrem toho obsahovali sezónnu zložku vo forme 12-mesačnej, 6-mesačnej a 4-mesačnej periódy (okrem Popradu).

Periodická zložka v priemerných ročných prietokoch bola identifikovaná na tokoch Hornád a Poprad a to 4,91 roka, teda opäť necelých 5 rokov. Toky Bodrog, Hron a Váh nemali identifikované štatisticky významné periódy v priemerných ročných prietokoch (tab. 3 stĺpec *Perióda [rok]*).

Model reziduálnej zložky priemerných mesačných prietokov bol namodelovaný po tom, čo časový rad bol rozložený na trendovú, sezónnu, cyklickú zložku a reziduá. Pre toky Bodrog, Hron, Hornád a Poprad podľa modelu reziduálnej zložky je vhodný iba model AR1, teda predstavujú autoregresný proces prvého rádu. Pre Váh je vhodný AR-ARCH model, ktorý obsahuje biely šum vypovedajúci o väčšej rozkolísanosti priemerných mesačných prietokov (tab. 3 stĺpec AR-ARCH model). Model reziduálnej zložky nebol aplikovaný na priemerné ročné prietoky.



Obr. 2. 3D vizualizácia mesačných prietokov v závislosti od mesačných úhrnov zrážok.

Fig. 2. 3D visualisation of the mean monthly discharges according to monthly total precipitation.

Analýza priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a sezónach

Analýza priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a sezónach obsahuje identifikáciu štatisticky významných trendov s $P = 0,05$. Priemerné sezónne prietoky boli zadefinované od mája po október pre letné obdobie a od novembra po apríl pre zimné obdobie. Zhrnuté výsledky trendovej analýzy sa nachádzajú v tab. 4. Tok Bodrog nevykazuje štatisticky významné trendy v analýze priemerných mesačných prietokoch po mesiacoch ani po sezónach.

Na toku Hron boli štatisticky významné klesajúce trendy identifikované v mesiacoch apríl, máj, jún a október. V zimnom a letnom období boli taktiež zistené štatisticky významné klesajúce trendy (obr. 3).

Tok Hornád preukazuje štatisticky významný klesajúci trend v mesiaci apríl. V priemerných sezónnych prietokoch nebol identifikovaný štatisticky významný trend.

Na toku Váh bol štatisticky významný klesajúci trend identifikovaný v júni. V priemerných sezónnych prietokoch nebol identifikovaný štatisticky významný trend. Tok Poprad nepreukázal štatisticky významné trendy v ani jednom mesiaci, ani v sezónach.

Zhrnuté výsledky trendovej analýzy v tab. 4 sú usporiadané na trendy v jednotlivých mesiacoch (Január – December) a na trendy v priemerných zimných a letných prietokoch (Zima a Leto).

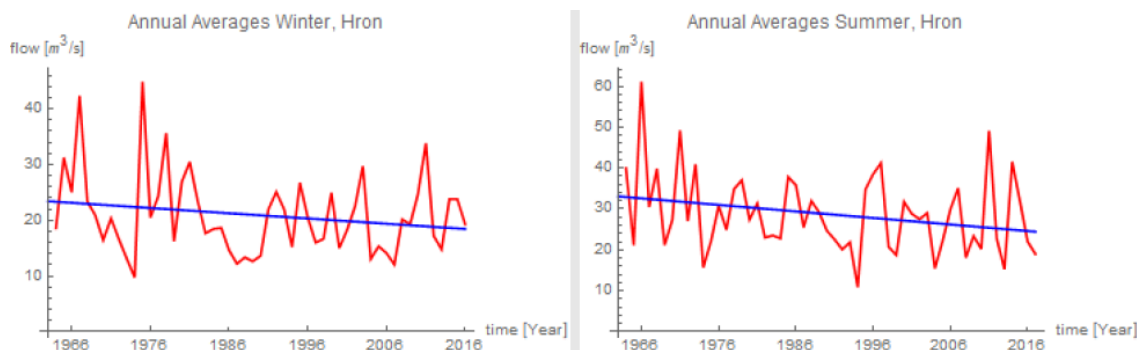
Vo výsledkoch trendovej analýzy je možné pozorovať zoskupenie klesajúcich trendov, ktoré sa objavujú v apríli, máji, júni, teda na začiatku obdobia priemerných

Tabuľka 2. Popisná štatistika
Table 2. The descriptive statistic

Tok	Min [m ³ .s ⁻¹]	Max [m ³ .s ⁻¹]	Med [m ³ .s ⁻¹]	μ	σ
Bodrog	12,74	602,74	80,05	110,65	88,58
Hron	6,31	122,94	19,05	24,85	17,57
Hornád	5,67	202,32	21,27	29,46	24,47
Váh	4,98	87,11	16,22	20,01	12,76
Poprad	2,82	71,07	12,37	14,99	10,13

Tabuľka 3. Trendová a periodická zložka pre priemerné mesačné a ročné prietoky a AR-ARCH model pre priemerné mesačné prietoky
Table 3. The trend and periodicity analysis of the mean monthly and annual discharges and AR-ARCH model of the mean monthly discharges

Tok	Trend v mes.	Trend v rokoch	Periódna [mesiac]	Periódna [rok]	AR-ARCH model
Bodrog	konšt.	konšt.	-	-	$y_t = 0,36y_{t-1} + \varepsilon_t$
Hron	28,13-0,01t	28,08-0,12t	58,9; 24	-	$y_t = 0,40y_{t-1} + \varepsilon_t$
Hornád	konšt.	konšt.	58,9	4,91	$y_t = 0,38y_{t-1} + \varepsilon_t$
Váh	konšt.	konšt.	-	-	$y_t = 0,35y_{t-1} + 33,00 + 0,54\varepsilon_{t-1}^2 + v_t$
Poprad	konšt.	konšt.	58,9	4,91	$y_t = 0,29y_{t-1} + \varepsilon_t$



Obr. 3. Klesajúci trend na toku Hron pre letné a zimné obdobie.

Fig. 3. The declining trend for Hron River at annual averages winter and summer.

letných prietokov. Zároveň najvýznamnejšiu zmenu v priemerných mesačných prietokoch po mesiacoch a po sezónach možno identifikovať na toku Hron.

Viacrozmerná analýza rieky Hron

Po identifikovaní najvýznamnejších zmien, najmä v analýze trendov a periodicity, bol vybraný Hron, ktorý bol podrobený viacrozmernej analýze. Viacrozmerná analýza využíva mesačné úhrny zrážok k prislúchajúcemu povodiu, ktoré boli vypočítané pomocou IDW (inverse distance weighting) metódy (Valent a Výleta, 2015).

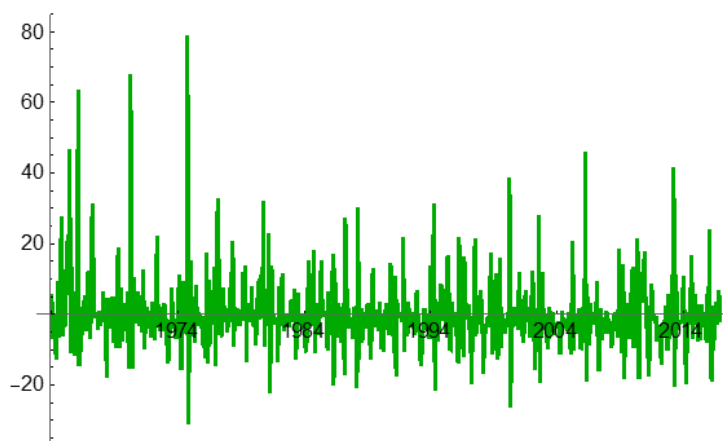
Výberová korelácia medzi zrážkami a prietokmi je rovná 0,41. Testom korelačného koeficienta sa na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ zamietla hypotéza (P-hodnota $< \alpha$), že korelačný koeficient je nulový. Navyše model reziduálnej zložky prietokov pre Hron spĺňa AR(1) model, preto trendovú zložku priemerných mesačných prietokov toku Hron modelujeme dvomi nezávislými premennými – mesačnými úhrnmi zrážok (premenná x) za uvedený

mesiac a priemernými mesačnými prietokmi (premenná x) s oneskorením jeden mesiac. Trendová zložka je v tvare:

$$T_t = 3,34 + 0,48x_{t-1} + 0,14z_t \quad (7)$$

Po odstránení trendovej zložky sa určili, pomocou periodogramu a Fisherovho testu periodicity, tri významné frekvencie 4, 6 a 12 mesiacov s dĺžkami periód $L_1 = \frac{\pi}{6}$, $L_2 = \frac{\pi}{3}$, $L_3 = \frac{\pi}{2}$. Periodická zložka sa domodelovala zmesou sínusov a kosínusov s uvedenými frekvenciami. Štatistickými testami sa určili štatisticky významné členy a vynechali dva členy (konštantný a člen $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$). Nový model sezónnej Zložky vykazoval štatisticky lepšie vlastnosti a je v tvare

$$S_t = -5,77 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 3,46 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 8,35 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 5,6 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 2,15 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad (8)$$



Obr. 4. Výsledné reziduá po trendovej, sezónnej a cyklickej zložke.
Fig. 4. The residual after trend, seasonal and cyclic components.

Tabuľka 4. Trendová analýza piatich tokov
Table 4. The trend analysis of five rivers

	Bodrog	Hron	Hornád	Váh	Poprad
Január	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Február	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Marec	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Apríl	konšt.	61,86-0,41t	63,56-0,44t	konšt.	konšt.
Máj	konšt.	46,30-0,27t	konšt.	konšt.	konšt.
Jún	konšt.	33,91-0,20t	konšt.	32,80-0,16t	konšt.
Júl	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
August	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
September	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Október	konšt.	26,33-0,26t	konšt.	konšt.	konšt.
November	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
December	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Zima	konšt.	23,42-0,09t	konšt.	konšt.	konšt.
Leto	konšt.	33,09-0,16t	konšt.	konšt.	konšt.

Test nulovosti autokorelačnej funkcie ukázal, že rezíduá e_t po odstránení trendu a sezónnej zložky sú tvorené korelovanými náhodnými veličinami, ktoré spĺňajú model MA(1), čiže model kĺzavých priemerov rádu 1 v tvare

$$e_t = z_t - 0,17z_{t-1} \quad (9)$$

kde z_t je biely šum. Rezíduá po aplikovaní MA(1) procesu už nevykazovali žiadne korelácie. Priemerné mesačné prietok teda spĺňajú model

$$x_t = T_t + S_t + e_t \quad (10)$$

kde jednotlivé zložky modelu sú dané predošlými vzťahmi. Na obr. 5 sú hodnoty priemerných mesačných prietokov (modrá farba) a modelované hodnoty priemerných mesačných prietokov pre prvých a posledných 10 rokov modelovaného radu (žltá farba).

Analýza siedmich vybraných vodomerných staníc v povodí Váhu

V nasledujúcej analýze siedmich vybraných vodomerných staníc je opäť uvedená stanica Váh – Liptovský Mikuláš z predchádzajúcej analýzy piatich vodomerných staníc kvôli lepšiemu porovnaniu výsledkov. Jed-

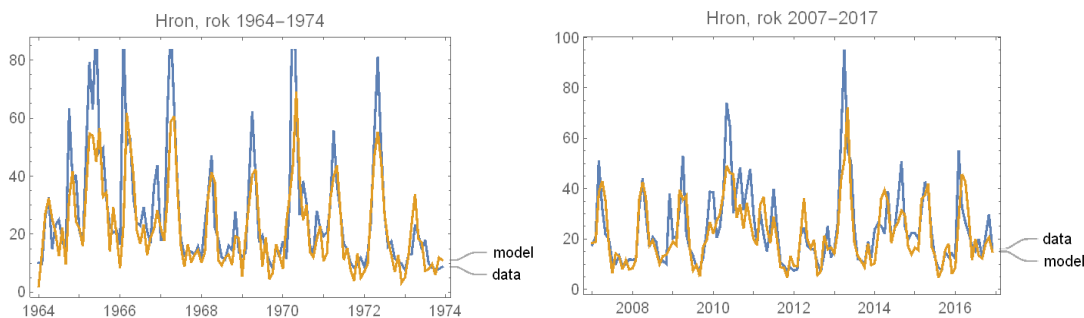
notlivé metódy sú aplikované v takom poradí a rozsahu, ako vo vyššie uvedenej analýze piatich vodomerných staníc.

Globálna analýza priemerných mesačných prietokov

Popisná štatistika siedmich vodomerných staníc v povodí Váhu obdobne preukázala najväčšie hodnoty pri najväčšom povodí, v tomto prípade to bol tok Orava (tab. 5). Ten má aj najväčší rozptyl priemerných mesačných prietokov.

Analýza trendov priemerných mesačných prietokov za celé sledované obdobie preukázala štatisticky významné klesajúce trendy na tokoch Kysuca, Bystrica a Čierny Váh. Na tokoch Váh, Turiec, Orava a Belá neboli identifikované štatisticky významné trendy (tab. 6 stĺpec *Trend v mes.*). Analýza trendov priemer-ných ročných prietokov preukázala taktiež štatisticky významné klesajúce trendy na Kysuci, Bystrici a Čiernom Váhu. Na ostatných tokoch – Váh, Turiec, Orava, Belá neboli identifikované štatisticky významné trendy (tab. 6 stĺpec *Trend v rokoch*).

Periodická zložka priemerných mesačných prietokov bola detegovaná na toku Orava so štatisticky významnou periódou každých necelých 5 rokov (58,9 mesiacov) a na toku Čierny Váh s periódou 14,7 mesiaca (tab. 6 stĺpec *Periódna [mesiac]*). Všetky toky okrem toho obsa-



Obr. 5. Modelované hodnoty priemerných mesačných prietokov pre prvých 10 rokov (naľavo) a posledných 10 rokov (napravo) skúmaného obdobia.

Fig. 5. The modelled values of the mean monthly discharges for the first 10 years (leftside) and last 10 years (rightside) of the period.

Tabuľka 5. Popisná štatistika
Table 5. The descriptive statistic

Tok	Min [m ³ .s ⁻¹]	Max [m ³ .s ⁻¹]	Med [m ³ .s ⁻¹]	μ	σ
Váh	4,98	87,11	16,22	20,01	12,76
Kysuca	1,52	85,55	12,34	16,28	12,99
Bystrica	0,36	23,05	3,18	4,18	3,23
Turiec	2,44	43,93	7,89	9,84	6,15
Orava	7,87	142,30	29,42	32,69	18,94
Belá	0,51	20,24	2,42	3,49	2,97
Čierny Váh	0,60	19,77	2,73	3,46	2,39

hovali sezónnu zložku vo forme 12-mesačnej, 6-mesačnej (okrem Oravy) a 4-mesačnej periódy (okrem Oravy, Belej a Čierneho Váhu).

V priemerných ročných prietokoch nebola identifikovaná žiadna štatisticky významná perióda (tab. 6 stĺpec *Periódá [rok]*).

Model reziduálnej zložky priemerných mesačných prietokov bol namodelovaný po tom, čo časový rad bol rozložený na trendovú, sezónnu, cyklickú zložku a rezíduá. Pre toky Bystrica a Turiec podľa modelu reziduálnej zložky je vhodný iba model AR1, teda predstavujú autoregresný proces prvého rádu. Toky Váh, Kysuca, Orava, Belá a Čierny Váh možno namodelovať podľa AR-ARCH modelu. Tok Belá s najrozsiahlejšou zložkou bieleho šumu predstavuje tok so značne rozkolísanými priemernými mesačnými prietokmi (tab. 6 stĺpec *AR-ARCH model*). Model reziduálnej zložky nebol aplikovaný na priemerné ročné prietoky.

Analýza priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a sezónach

Štatisticky významný klesajúci trend na Váhu bol zistený iba v júni.

Tok Kysuca v mesiacoch jún, august, december a v letnom období má štatisticky významný klesajúci trend.

Tok Bystrica v apríli, júni, júli, auguste, decembri, v zimnom a letnom období má štatisticky významné

klesajúce trendy (obr. 6). Turiec nevykazuje žiadne štatisticky významné trendy.

Štatisticky významné klesajúce trendy na toku Orava boli identifikované v mesiacoch január, február, december a v zimnom období. Štatisticky významné rastúce trendy boli zistené v apríli a máji.

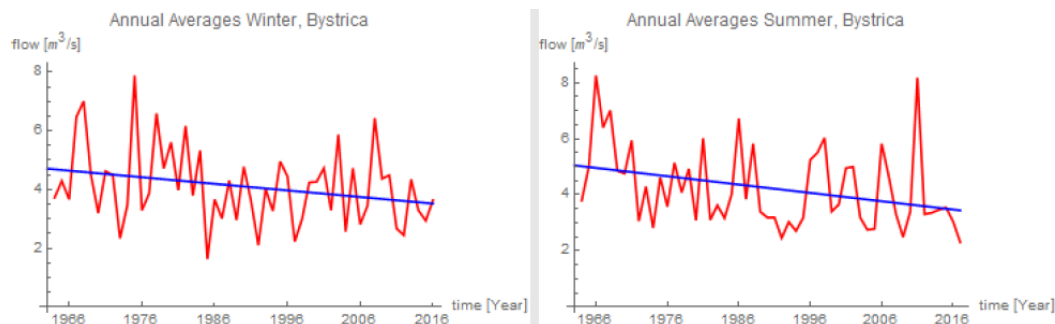
Tok Belá má štatisticky významný rastúci trend v novembri. V ostatných mesiacoch a sezónnych prietokoch nebol identifikovaný štatisticky významný trend. Štatisticky významné klesajúce trendy na Čiernom Váhu boli zistené v máji, októbri a v zimnom období. Výsledky trendovej analýzy siedmich tokov sú zhrnuté v tab. 7. Najviac štatisticky významných trendov možno pozorovať na toku Bystrica (7 trendov) a potom na toku Orava (6 trendov). Naopak tok Turiec jediný nepreukazuje žiadne štatisticky významné trendy.

Záver

Prvá časť – analýza piatich povodí obsahujúca analýzu trendov priemerných mesačných prietokov za celé sledované obdobie preukázala klesajúci trend iba na rieke Hron, čo potvrdila aj analýza trendov priemerných ročných prietokov. Štatisticky významná perióda piatich rokov bola identifikovaná na tokoch Hron, Hornád a Poprad. Dvojročná perióda bola identifikovaná iba pre tok Hron. Pre priemerné mesačné prietoky na toku Váh bol vhodný AR-ARCH model.

Tabuľka 6. AR-ARCH modely
Table 6. The AR-ARCH models

Tok	Trend v mes.	Trend v rokoch	Periódá (mesiac)	Periódá (rok)	AR-ARCH model
Váh	konšt.	konšt.	-	-	$y_t = 0,35y_{t-1} + 33 + 0,54\varepsilon_{t-1}^2 + v_t$
Kysuca	$17,77 - 0,004t$	$17,69 - 0,05t$	-	-	$y_t = 0,16y_{t-1} - 0,06y_{t-2} + \varepsilon_t$
Bystrica	$4,86 - 0,002t$	$4,85 - 0,02t$	-	-	$y_t = 0,19y_{t-1} + \varepsilon_t$
Turiec	konšt.	konšt.	-	-	$y_t = 0,37y_{t-1} + \varepsilon_t$
Orava	konšt.	konšt.	58,9	-	$y_t = 0,39y_{t-1} - 0,07y_{t-2} + \varepsilon_t$
Belá	konšt.	konšt.	-	-	$y_t = 0,22y_{t-1} - 0,12y_{t-2} + 0,03y_{t-3} + 0,09y_{t-4} - 0,07y_{t-5} + \varepsilon_t$
Č. Váh	$3,79 - 0,001t$	$3,79 - 0,01t$	14,7	-	$y_t = 0,37y_{t-1} - 0,06y_{t-2} + \varepsilon_t$



Obr. 6. Klesajúce trendy pre tok Bystrica pre zimné a letné obdobie.

Fig. 6. The decreasing trends for Bystrica River at annual averages winter and summer.

Analýza priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a sezónach identifikovala zoskupenie klesajúcich trendov v apríli (pre Hron a Hornád), v máji (pre Hron) a v júni (pre Hron a Váh), teda na začiatku obdobia priemerných letných prietokov. Najvýznamnejšiu zmenu v priemerných mesačných prietokoch po mesiacoch a po sezónach možno identifikovať na toku Hron.

Viacrozmerná analýza toku Hron s použitím mesačných úhrnov zrážok spriemerovaných na povodie bola použitá na namodelovanie prvej a poslednej dekády sledovaného obdobia v rámci priemerných mesačných prietokov.

Druhá časť – analýza siedmich povodí preukázala v trendovej analýze priemerných mesačných prietokov za celé sledované obdobie klesajúce trendy na tokoch Kysuca, Bystrica a Čierny Váh. Analýza trendov priemerných ročných prietokov preukázala také isté výsledky. Periodická zložka s dobou trvania necelých piatich rokov bola identifikovaná len v priemerných mesačných prietokoch na toku Orava a na toku Čierny Váh bola zistená periodicita v trvaní 14,7 mesiacov. Pre priemerné mesačné prietoky Váhu, Kysuce, Oravy, Belej a Čierneho Váhu možno namodelovať AR-ARCH model. Tok Belá s najrozsiahlejšou zložkou bieleho šumu predstavuje tok so značne rozkolísanými priemernými mesačnými prietokmi.

Analýza priemerných mesačných prietokov po mesiacoch a sezónach preukázala najviac klesajúcich trendov na toku Kysuca, Bystrica a Orava, v ktorej sa ojedinele vyskytli aj štatisticky významné rastúce trendy (apríl a máj). Tok Bystrica na nachádza v povodí Kysuce a tok Orava sa nachádza v ich blízkosti.

Metódy vyplývajúce zo štatistickej metodiky použité v tomto článku predstavujú jednu z možností základného analyzovania časových radov. Základná analýza prietokov bola obohatená o aplikáciu AR-ARCH modelu a taktiež o viacrozmernú analýzu vybraného toku, ktorý preukázal najvýraznejšie zmeny. Použitá metodika predstavuje počiatočnú fázu v oblasti identifikácie zmien na vybraných tokoch. Budúce kroky budú viesť k aplikácii

d'alších metód, ako napr. metóda kopúl a taktiež k použitiu ďalších hydrometeorologických prvkov, ako sú napríklad atmosférické zrážky.

Pod'akovanie

Uvedená práca vznikla vďaka finančnej pomoci grantovej agentúry VEGA 1/0891/17 a APVV-14-0013.

Literatúra

- Bawden, A., Linton, H., Burn, D., Prowse, T. (2014): A spatiotemporal analysis of hydrological trends and variability in the Athabasca River region, Canada. In *Journal of Hydrology* 509. 333 – 342.
- Box, G.E.P., Jenkins, G. (1976): *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day, Oakland, California.
- Bronstert, A., Niehoff, D., Bürger, L. (2002): Effects of climate and land – use change on storm runoff generation: Present knowledge and modelling capabilities. In: *Hydrological Processes*, 16 (2), 509 – 529, DOI: 10.1002/hyp.326.
- Cipra, T. (1986): *Analýza časových rad s aplikaciami v ekonomii*. Praha: SNTL.
- Danáčová, Z., Blaškovičová, L., Lovásová, E., Poórová, J., Šimor, V., Škoda, P. (2015): Hydrologické extrémny: modelovanie a predpovedanie. In *ACTA HYDROLOGICA SLOVACA*, ročník 16, Tematické číslo, 13 – 22.
- Engle, R. F. (1982): Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation.
- Fendeková, M., Poórová, J., Slivová, V. (2017): Hydrologické sucho na Slovensku a prognóza jeho vývoja. Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta. ISBN 978-80223-4398-5.
- Gautier, E., Dépret, T., Costard, F., Virmoux, C.,

Tabuľka 7. Trendová analýza siedmich tokov
Table 7. The trend analysis of seven rivers

	Váh	Kysuca	Bystrica	Turiec	Orava	Belá	Čierny Váh
Január	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	47,44-0,33t	konšt.	konšt.
Február	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	54,28-0,42t	konšt.	konšt.
Marec	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Apríl	konšt.	konšt.	9,71-0,07t	konšt.	31,60+0,30t	konšt.	konšt.
Máj	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	26,38+0,34t	konšt.	7,97-0,05t
Jún	32,80-0,16t	17,21-0,12t	4,99-0,04t	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Júl	konšt.	konšt.	5,23-0,04t	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
August	konšt.	14,38-0,11t	3,77-0,03	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
September	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.
Október	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	4,04-0,04t
November	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.	1,80+0,01t	konšt.
December	konšt.	19,03-0,13t	4,79-0,04t	konšt.	38,14-0,27t	konšt.	konšt.
Zima	konšt.	konšt.	4,71-0,02t	konšt.	38,13-0,21t	konšt.	2,79-0,01t
Leto	konšt.	18,00-0,08t	5,05-0,03t	konšt.	konšt.	konšt.	konšt.

- Federov, A., Grancher, D., Konstantinov, P., Brunstein, D. (2018): Going with the flow: Hydrologic response of middle Lena River (Siberia) to the climate variability and change. In *Journal of Hydrology* 557, 475 – 488.
- Halmová, D., Pekárová, P. (2013): Trendová analýza mesačných a extrémnych prietokov v stanici Belá-Podbanské. In *Acta Hydrologica Slovaca*, ročník 14, č. 1, 193 – 203.
- MŽP (2011): Implementácia smernice Európskeho parlamentu a Rady 2007/60/ES z 23. októbra 2007 o hodnotení a manažmente povodňových rizík. Predbežné hodnotenie povodňového rizika v čiastkovom povodí Bodrogu. Ministerstvo životného prostredia Slovenskej republiky, December 2011, 38–42.
- Pekárová, P., Miklánek, P., Pekár, J., Pramuk, B. (2017): Identifikácia zmien režimu denných prietokov slovenských riek II. časť: Porovnanie dvoch období. In *Acta Hydrologica Slovaca*, ročník 18, č. 2, 183 – 192.
- Petrow, T., Merz, B. (2009): Trends in flood magnitude, frequency and seasonality in Germany in the period 1951–2002. In *Journal of Hydrology* 371, 2009, 129–141.
- Pramuk, B., Pekárová, P., Halmová, D. (2013): Identifikácia zmien povodňových prietokov Dunaja v stanici Bratislava v období 1876 – 1943 a 1944 – 2010. In *Acta Hydrologica Slovaca*, ročník 14, č. 2, 2013, 327 – 336.
- Pramuk, B., Pekárová, P., Škoda, P., Halmová, D., Bačová Mitková, V. (2016): Identifikácia zmien režimu denných prietokov slovenských riek. In *Acta Hydr. Slov.*, ročník 17, č. 1, 2016, 65 – 77.
- Schönwese CD. - RAPP J. (1997): *Climate Trend Atlas of Europe - Based on Observations 1891–1990*. Kluwer Academic Publishers; Dordrecht: 224.
- Škoda, P., Majerčáková, O., Demeterová, B., Danáčová, Z. (2008): Zhodnotenie vývoja minimálnych prietokov na území Slovenska, Národný Klimatický program Slovenskej Republiky, NKP 12/08, Dôsledky klimatickej zmeny a adaptačné opatrenia, 49 – 60.
- Valent, P., Výleta, P. (2015): Calculating Areal Rainfall Using A More Efficient Idw Interpolation Algorithm. In *International Journal of Engineering Research & Science (IJOER)*. Vol.– 1, Issue–7, October– 2015, 9–17.

THE CHANGE ANALYSIS OF THE MEAN MONTHLY DISCHARGES IN SLOVAKIA IN RECENT DECADES

An analysis of a hydrometeorological time data series is an important part of hydrology. Understanding changes in time series results in a better understanding of the causes of these changes. A time data series can be evaluated by a large number of analyses. One of them is the application of statistical methods.

The article deals with a basic analysis of the mean monthly discharges in selected stage-discharge gauging stations in Slovakia using statistical methods.

The time data series, in this case, the mean monthly, annual, and seasonal discharges, were subjected to basic descriptive statistic, trend and periodicity analyses, application of the AR-ARCH model and multivariate analysis.

These methods were applied to five stage-discharge gauging stations in central and eastern Slovakia and seven stage-discharge gauging stations located in the northern part of the Váh River basin in Slovakia.

The analysis of the mean monthly discharges by months and the mean seasonal discharges is based on a trend analysis of the mean monthly discharges by months and

a trend analysis of the mean summer discharges (from May to October) and the mean winter discharges (from November to April).

In most of the cases, if a significant trend was identified, it was a declining trend with a p -value=0.05. A statistically significant period of five years was identified in the Hron River, Hornád, and Poprad Rivers. A two-year period was identified in the Hron River. The most significant changes were identified in the Hron River, where the most significant declining trends were observed, as well as the five-year and two-year statistically significant periods using the periodicity analysis. A multivariate analysis was used for the Hron River.

The analysis of seven rivers in the Váh catchment showed the trends that decreased the most in the Kysuca, Bystrica, and Orava Rivers, where statistically significant upward trends (April and May) have also rarely occurred. The periodicity analysis was identified only at the mean monthly discharges in the Orava River, i.e., almost five years, and in the Čierny Váh River, 14.7 months.

Ing. Mária Ďurigová
prof. Ing. Kamila Hlavčová, PhD.
Katedra vodného hospodárstva krajiny, Stavebná fakulta,
Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Radlinského 11
810 05 Bratislava 1
Tel.: +421 944 067 099,
+421 2 5927 4620
E-mail: maria.durigova@stuba.sk,
kamila.hlavcova@stuba.sk

prof. RNDr. Magdaléna Komorníková, PhD,
Doc. RNDr. Jana Kalická, PhD.
Mgr. Dominika Ballová
doc. Ing. Tomáš Bacigál, PhD.
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta,
Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Radlinského 11
810 05 Bratislava 1
E-mail: komornikova@math.sk,
jana.kalicka@stuba.sk,
ballova@math.sk,
tomas.bacigal@stuba.sk